# 4η Διάλεξη:

Έχουμε δείξει ως τώρα πως τα μόνα δυναμικά που μας δίνουν ~~σχεδόν~~ κλειστή κυκλική τροχιά αν διαταράξω ελάχιστα την αρχική κυκλική τους τροχιά είναι τα εξής:

i. $V = Ar^a$ , $a > 0$ κ' $A > 0$
ii. $V = -\frac{A}{r^a}$ , $a > 0$ κ' $A > 0$
iii. $V = A\log r$ το οποίο το έχουμε ήδη απορρίψει.

Μικρή ανασκόπηση:

$$V_e(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$V_e'(r_c) = 0 \Rightarrow \frac{L^2}{2mr_c^3} = V'(r_c) \Rightarrow \frac{L}{\sqrt{m}\, r_c^{3/2}} = \sqrt{V'(r_c)}$$

$$\omega_\theta \equiv \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{\sqrt{m}\, r_c^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{mr_c}} = \sqrt{\frac{V'(r_c)}{mr_c}}$$

$$m\ddot{\xi} + m\omega_r^2 \xi = 0 \, , \quad m\omega_r^2 = V''(r_c) + \frac{3V'(r_c)}{r_c} \, , \quad \omega_r = \frac{\sqrt{V'' + 3V'/r}}{\sqrt{m}}$$

$$r = r_c + \xi(t)$$

$$\frac{\bar{\omega}_\theta}{\omega_r} = \sqrt{\frac{V'}{r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{V'' + 3V'/r}} = \sqrt{\frac{V'}{3V' + rV''}}$$

η τροχιά κλείνει αν $\frac{\bar{\omega}_\theta}{\omega_r}$ = ρητός αριθμός

Για την πρώτη περίπτωση δυναμικού έχουμε:

$$V' \sim a \Rightarrow \frac{\bar{\omega}_\theta}{\omega_r} = \sqrt{\frac{a}{3a + a(a-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2+a}} = \frac{p}{q}$$

Αντίστοιχα, για τη δεύτερη:

$$\frac{\bar{\omega}_\theta}{\omega_r} = \frac{1}{\sqrt{2-a}}$$

Δηλαδή, η γωνία από περίκεντρο σε περίκεντρο στο όριο σχεδόν κυκλικής τροχιάς είναι:

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\pi \frac{p}{q} = \omega_\theta \frac{2\pi}{\omega_r} = 2\pi \frac{\omega_\theta}{\omega_r}$$

Θέλω να εξετάσω την $\Delta\theta_{\pi\to\pi}$ σε αυτά τα δυναμικά συναρτήσει της ενέργειας.

Την $1^η$ περίπτωση δυναμικού θα την εξετάσω στο όριο $E\to\infty$ και θα δείξω πως $\Delta\theta_{\pi\to\pi} = \pi$ ανεξάρτητα του χαρακτήρα της δύναμης

Λειτουργούν ως αρμονικοί ταλαντωτές

Θεωρώ $\xi = \frac{L}{mr}$

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_e\left(\frac{L}{m\xi}\right)\right)}}$$

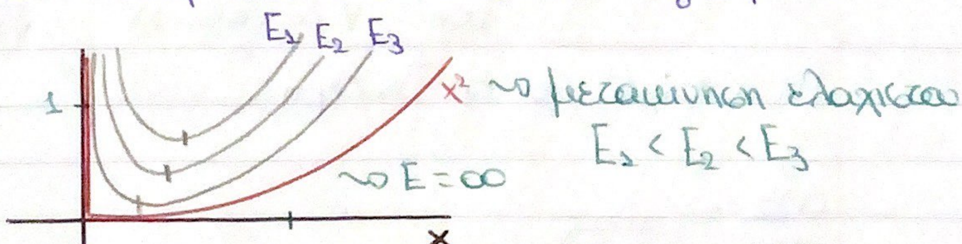
όπου $V_e\left(\frac{L}{m\xi}\right) = \frac{L^2 m^2 \xi^2}{2mL^2} + \frac{AL^a}{m^a \xi^a}$

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{m\xi^2}{2} - \frac{AL^a}{m^a\xi^a}\right)}} = 2\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \xi^2 - A\frac{2L^a}{m^{1+a}\xi^a}}}$$

κάνω αλλαγή μεταβλητής: $\xi = \sqrt{\frac{2E}{m}}\, x$

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = \lim_{E\to\infty} 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - \frac{AL^a}{(2m)^{a/2}E^{1+a/2}}\cdot\frac{1}{x^a}}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Θεωρώ $x = \sin\varphi$ και τότε: $\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi$




$\lim_{E\to\infty}$ $V_\infty$ $x^2$ το ενεργό δυναμικό → δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή με απειρόβαθο φρέαρ στο $x=0$!

Επομένως, όταν $E \to \infty$, όλες οι τροχιές έχουν $\Delta\theta_{\pi\to\pi} = \pi$
και άρα και για τις σχεδόν κυκλικές τροχιές θα είναι $\Delta\theta = \pi$

Όμως, για την 1η περίπτωση δυναμικού: $\Delta\theta_{\pi\to\pi} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2+a}}$
↳ σε αυτές ισχύει

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{2+a}} = \pi \Rightarrow \sqrt{2+a} = 2 \Rightarrow a = 2 \ !$$

Δηλαδή, $V = Ar^2$ Αρμονικός Ταλαντωτής

Έχω αποδείξει πως για να κλείνουν οι τροχιές όταν $E \to \infty$ πρέπει $a=2$. Άρα, το μόνο υποψήφιο δυναμικό για κλειστές για κάθε $E$ είναι το $a=2$. Ελέγχω αν αυτό ισχύει:

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{L}{mr^2}\,dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2r^2} - \frac{2A}{m}r^2}} \quad , \text{ θέτω πάλι } \xi = \frac{L}{mr}$$

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \xi^2 - 2A\frac{L^2}{m^3}\frac{1}{\xi^2}}}$$

πολλαπλασιάζω πάνω-κάτω με $\xi$

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{\xi\,d\xi}{\sqrt{\frac{2E\xi^2}{m} - \xi^4 - 2A\frac{L^2}{m^3}}} \quad , \text{ και θέτω } \xi^2 = x$$

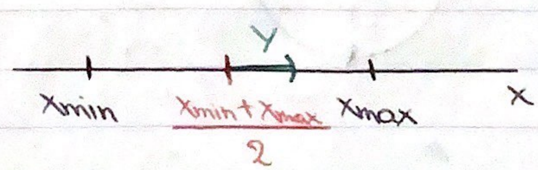
$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + \frac{2E}{m}x - 2\frac{AL^2}{m^3}}} = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{(x_{max}-x)(x-x_{min})}}$$

θέτω: $x = \dfrac{x_{max}+x_{min}}{2} + \left(\dfrac{x_{max}-x_{min}}{2}\right) y$

οπότε: $x_{max} - x = \left(\dfrac{x_{max}-x_{min}}{2}\right)(1-y)$

$$x - x_{min} = \left(\frac{x_{max}-x_{min}}{2}\right)(1+y)$$

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = \int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pi$$ δηλαδή το δείξαμε $\forall E$



Για την $2^η$ περίπτωση δυναμικού, θα εξετάσω το όριο $E \to 0$ (άνω κατώφλι) που δίνει σχεδόν φραγμένες τροχι

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = \lim_{E\to 0} 2\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \xi^2 + \frac{Am^a\xi^a}{L^a}}} = 2\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{Am^a}{L^a}\xi^a - \xi^2}}$$

Θεωρώ $\xi = \lambda x$, όπου $\lambda = \left(\frac{Am^a}{L^a}\right)^{1/(2-a)}$

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{\lambda dx}{\lambda\sqrt{x^a - x^2}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^{a/2}\sqrt{1-x^{(2-a)}}}$$

Θέτω $x^{2-a} = \sin^2\varphi$ όπου $(2-a)x^{1-a}dx = 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{(2-a)\underbrace{x^{1-a/2}}_{=\sqrt{x^{2-a}} = \sin\varphi}\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \frac{4}{2-a}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2-a}$$

Άρα, όλες οι τροχιές για $E \to 0$ έχουν $\Delta\theta = \frac{2\pi}{2-a}$, αυτό θα ισχύει και για σχεδόν κυκλικές τροχιές: άρα θα πρέπει $\frac{2\pi}{2-a} = \frac{2\pi}{\sqrt{2-a}} \Rightarrow$

$\sqrt{2-a} = 1 \Rightarrow a = 1$!

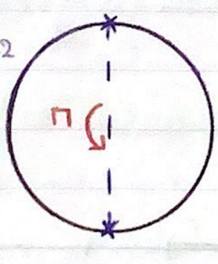
Δηλαδή, $V = -\frac{A}{r}$ Βαρύτητα

Θέλω πάλι να το αποδείξω $\forall E$ αφήνεται για HW

περιμένω $\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\pi$

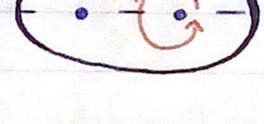
$a = 2$

$V = Ar^2$




$a = 1$

$V = -\frac{A}{r}$



Αρμονικός Ταλαντωτής:

$$V(r) = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

η κίνηση είναι επίπεδη στο επίπεδο που ορίζεται από αρχική θέση και αρχική ταχύτητα.

$$\ddot{\bar{r}} + \omega^2 \bar{r} = 0 \;,\; \bar{r}(0) = \bar{r}_0 \;,\; \bar{v}(0) = \bar{v}_0$$

Ψάχνω $\bar{r}(t) = \bar{c}\cos(\omega t + \varphi) + \bar{s}\sin(\omega t + \varphi)$ όπου τα $\bar{c}$ και $\bar{s}$ και η φάση $\varphi$ να ικανοποιούν:

$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 \cos(\omega t) + \frac{\bar{v}_0}{\omega}\sin(\omega t)$ και $\bar{c} \perp \bar{s}$

$$\frac{\bar{r}\cdot\bar{c}}{|\bar{c}|^2} = \cos(\omega t) \quad \text{και} \quad \frac{\bar{r}\cdot\bar{s}}{|\bar{s}|^2} = \sin(\omega t)$$

$$\frac{(\bar{r}\cdot\bar{c})^2}{|\bar{c}|^4} + \frac{(\bar{r}\cdot\bar{s})^2}{|\bar{s}|^4} = 1 \quad \text{έλλειψη}$$

Βαρυτικό Δυναμικό:

$$V(r) = -\frac{A}{r}$$

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\frac{A}{r^2}\hat{r} \Rightarrow m\frac{d}{dt}(v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}) = -\frac{A}{r^2}\hat{r} \Rightarrow$$

$$m\frac{d}{d\theta}(v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta})\underbrace{\dot{\theta}}_{\hookrightarrow \frac{L}{mr^2}} = -\frac{A}{r^2}\hat{r} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\theta}(v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}) = -\frac{A}{L}\hat{r} \Rightarrow$$

$$v_r'\hat{r} + v_r\hat{\theta} + v_\theta'\hat{\theta} - v_\theta\hat{r} = -\frac{A}{L}\hat{r}$$

αν κοιτάξω το πρόβλημα ως προς τις γωνίες το πρόβλημα γίνεται γραμμικό (Newton)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_r}{d\theta} - v_\theta &= -\frac{A}{L} \\ \frac{dv_\theta}{d\theta} + v_\theta &= 0 \end{aligned}\right\} \text{τροχιά του } v \text{ όπως εξελίσσεται το } \theta$$

ομογενής λύση: $v_\theta = \frac{A}{L} + \tilde{v}_\theta$

$$\frac{dv_r}{d\theta} - \tilde{v}_\theta = 0 \quad \leadsto \quad \frac{d^2 v_r}{d\theta^2} + v_r = 0$$

$$\frac{d\tilde{v}_\theta}{d\theta} + v_r = 0 \quad \leadsto \quad \frac{d^2 \tilde{v}_\theta}{d\theta^2} + \tilde{v}_\theta = 0$$

$$v_r = v_{r0} \sin(\theta + \varphi_1)$$
$$v_\theta = \frac{A}{L} + v_{\theta 0} \sin(\theta + \varphi_2)$$

Θα κοιτάξω το περίκεντρο, οπότε $v_r = v_{r0} \sin\theta$

άρα και $v_\theta = \frac{A}{L} + v_{\theta 0} \cos\theta$ το διάνυσμα κάνει κύκλο με κέντρο $\frac{A}{L}$

$$v_{r0} \cos\theta = v_{\theta 0} \cos\theta \Rightarrow v_{r0} = v_{\theta 0}$$

$$v_r^2 + \left(v_\theta - \frac{A}{L}\right)^2 = v_0^2$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} = r \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{mr} \Rightarrow$$

$$r(\theta) = \frac{\frac{L}{m}}{v_\theta} = \frac{\frac{L}{m}}{\frac{A}{L} + v_0 \cos\theta} = \frac{\frac{L^2}{mA}}{1 + \underbrace{\left(\frac{v_0 L}{A}\right)}_{\text{εκκεντρότητα}} \cos\theta}$$

Απόδειξη Laplace → Hamilton → Gibbs → Runge-Lenz:

Για δυναμικό $V = -\frac{k}{r}$, $r(\theta) = \frac{\frac{L^2}{mk}}{1 + \left(\frac{v_0 L}{k}\right)\cos\theta}$

διατηρούνται ενέργεια, στροφορμή και η ποσότητα:

$\bar{A} = \bar{p} \times \bar{L} - mk\bar{r}$, όπου $\bar{p} = m\bar{v}$ κ' $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$

με $\dot{\bar{p}} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$ κ' $\dot{\bar{L}} = 0$ (το έχω δείξει)

$$\dot{\bar{A}} = -\frac{km}{r^3}\bar{r} \times (\bar{r} \times \bar{v}) - km \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right) \Rightarrow$$

$$\dot{\bar{A}} = -\frac{km}{r^2}\left(\underbrace{\frac{\bar{v}\cdot\bar{r}}{r}}_{=\bar{v}\cdot\hat{r} = \dot{r}}\bar{r} - r\bar{v}\right) - km\left(\frac{r\bar{v} - \dot{r}\bar{r}}{r^2}\right) = 0 \Rightarrow \text{διατηρείται}$$