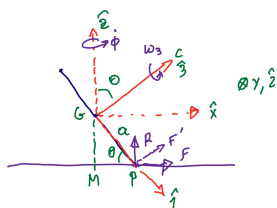


# Νομισματικά γυρίσματα και η κατάρρευση του δίσκου του Euler

21 Ιανουαρίου 2025



**Σχήμα 1:** Ο κυκλικός δίσκος του Euler έχει ακτίνα  $a$ ,  $G$  είναι το ΚΜ του δίσκου είναι που είναι στο κέντρο του και σχηματίζει γωνία  $\theta$  με το δάπεδο. Στο σημείο επαφής του δίσκου ασκούνται η αντίδραση από το έδαφος,  $R$ , και η  $x$  και  $y$  συνιστώσες της τριβής  $F$  και  $F'$  αντίστοιχα.

1 Μέχρι τώρα αναλύσαμε την κίνηση αξισυμμετρικών κυρίως στερεών των οποίων η κίνηση μπο-  
2 ρούσε να προσδιορισθεί σε κλειστή μορφή υπό μορφή ολοκληρωμάτων. Τώρα θα εξετάσουμε μερικά  
3 ενδιαφέροντα προβλήματα που δεν είναι ολοκληρώσιμα. Το πρώτο είναι ο δίσκος του Euler<sup>1</sup> που είναι  
4 ένας δίσκος που καθώς περιστρέφεται κυλιέται σε μία επίπεδη επιφάνεια. Η συμπεριφορά του συστή-  
5 ματος αυτού είναι γνώριμη διότι όλοι μας έχουμε παρακολουθήσει την κίνηση ενός περιστρεφόμενου  
6 νομίσματος πάνω στο τραπέζι και το γεγονός ότι πριν σταματήσει η κίνηση και καθώς το νόμισμα γί-  
7 νεται πιο οριζόντιο ακούγεται ένας ήχος αυξανόμενης συχνότητας. Βεβαίως αν δεν υπήρχε ανάλωση  
8 ενέργειας το νόμισμα θα συνέχιζε την κίνησή του επ'άοριστον. Το γεγονός ότι καταρρέει και μάλιστα  
9 σε πεπερασμένο χρόνο οφείλεται στο ότι με κάποιον τρόπο η ενέργεια του δίσκου αναλώνεται. Στο εδά-  
10 φιο αυτό θα εξετάσουμε την κίνηση του δίσκου του Euler και θα διερευνήσουμε την κατάρρευση του.  
11 Αλλά ας προσδιορίσουμε πρώτα τις εξισώσεις κίνησης του δίσκου του Euler.

Στον δίσκο ασκείται η δύναμη της βαρύτητας και στο σημείο επαφής οριζόντιες δυνάμεις τριβής και η αντίδραση από το δάπεδο στην κατακόρυφο διεύθυνση (βλ. Σχ. 1). Θεωρούμε ότι το δάπεδο δεν είναι λείο και ο δίσκος κυλιέται στο δάπεδο χωρίς να ολισθαίνει και επομένως η ταχύτητα του δίσκου στο σημείο επαφής με το δάπεδο είναι μηδενική. Επίσης θεωρούμε ότι οι δυνάμεις της τριβής δεν εκτελούν έργο και υπό την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχουν άλλες πηγές τριβής η ενέργεια του δίσκου διατηρείται. Η ακτίνα του δίσκου είναι  $a$ , και οι κύριες ροπές αδράνειας ως προς τις διαμέτρους του δίσκου είναι  $I = mka^2$  και ως προς τον άξονα συμμετρίας  $I_3 = 2mka^2$ . Το ΚΜ,  $G$ , είναι στο κέντρο του δίσκου και ο προσανατολισμός του συστήματος του σώματος  $G123$  ως προς ένα αδρανειακό σύστημα  $Ox'y'z'$ , όπου η  $Oz'$  είναι στη κατακόρυφη διεύθυνση, προσδιορίζεται με τις γωνίες του Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ . Η γωνιακή

<sup>1</sup>Euler, L. Theoria Motus Corporum Solidorum Seu Rigidorum (Greifswald, 1765).

ταχύτητα του σώματος είναι

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{y}} + \dot{\psi}\hat{\mathbf{z}},$$

όπου τα  $\hat{\mathbf{1}}, \hat{\mathbf{2}}$  και  $\hat{\mathbf{3}}$  είναι μοναδιαία διανύσματα στους άξονες του G123 ενώ τα  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$  και  $\hat{\mathbf{z}}$  είναι μοναδιαία διανύσματα του μη αδρανειακού καρτεσιανού συστήματος  $Gxyz$  που περιστρέφεται με το σώμα ως προς το αδρανειακό  $Ox'y'z'$  με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega\hat{\mathbf{z}} = \dot{\phi}\hat{\mathbf{z}}$  ώστε ανά πάσα στιγμή να είναι  $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{2}}$ . Η γωνία που σχηματίζει ο δίσκος με το δάπεδο είναι  $\theta$ , και  $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{3}} = \cos \theta$  (βλ. Σχ. 1). Η δυναμική κατάσταση του δίσκου προσδιορίζεται από την ταχύτητα του ΚΜ,  $\mathbf{U}$ , ως προς το αδρανειακό σύστημα  $Ox'y'z'$ , τη γωνιακή ταχύτητα  $\boldsymbol{\omega}$  και τον προσανατολισμό του σώματος. Οι γωνιακές ταχύτητες στους κύριους άξονες είναι  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , όπου επειδή  $\hat{\mathbf{z}} = -\sin \theta \hat{\mathbf{1}} + \cos \theta \hat{\mathbf{3}}$  και  $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{2}}$ , είναι:

$$\omega_1 = -\dot{\phi} \sin \theta, \quad \omega_2 = \dot{\theta}, \quad \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.$$

- 12 Η στροφορμή του σώματος ως προς το ΚΜ είναι  $\mathbf{L} = I\omega_1\hat{\mathbf{1}} + I\omega_2\hat{\mathbf{2}} + I_3\omega_3\hat{\mathbf{3}}$  και ο ρυθμός μεταβολής της  
13 στροφορμής είναι:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{G123} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}$$

όπου  $d\mathbf{L}/dt|_{G123}$  η μεταβολή της στροφορμής στο σύστημα G123 και

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\phi}\hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{y}} = \dot{\phi}(-\sin \theta \hat{\mathbf{1}} + \cos \theta \hat{\mathbf{3}}) + \dot{\theta}\hat{\mathbf{2}},$$

η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος G123 (που διαφέρει από την γωνιακή ταχύτητα του σώματος στο ότι το σύστημα G123 δεν περιστρέφεται γύρω από τον άξονα  $\hat{\mathbf{3}}$ ). Επομένως οι εξισώσεις της στροφορμής του δίσκου είναι

$$\frac{dL_1}{dt} + \omega'_2 L_3 - \omega'_3 L_2 = \tau_1 \quad (1\alpha')$$

$$\frac{dL_2}{dt} + \omega'_3 L_1 - \omega'_1 L_3 = \tau_2 \quad (1\beta')$$

$$\frac{dL_3}{dt} + \omega'_1 L_2 - \omega'_2 L_1 = \tau_3. \quad (1\gamma')$$

- 14 Η  $\boldsymbol{\tau}$  είναι η ροπή ως προς το ΚΜ των δυνάμεων που ασκούνται από το δάπεδο στο σώμα:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= (a\hat{\mathbf{1}}) \times (R\hat{\mathbf{z}} + F\hat{\mathbf{x}} + F'\hat{\mathbf{y}}) \\ &= (a\hat{\mathbf{1}}) \times (R(\hat{\mathbf{3}} \cos \theta - \hat{\mathbf{1}} \sin \theta) + F(\hat{\mathbf{1}} \cos \theta + \hat{\mathbf{3}} \sin \theta) + F'\hat{\mathbf{2}}), \end{aligned}$$

με συνισταμένες στους άξονες 123:

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = -Ra \cos \theta - Fa \sin \theta, \quad \tau_3 = aF'.$$

15 Επομένως η (1α') γίνεται:

$$\frac{d(-I\dot{\phi} \sin \theta)}{dt} + I_3\dot{\theta}\omega_3 - I\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta = 0,$$

16 και πολλαπλασιάζοντάς την με το  $\sin \theta$  έχουμε:

$$\frac{d(I\dot{\phi} \sin^2 \theta)}{dt} = I_3\omega_3\dot{\theta} \sin \theta, \quad (2)$$

17 ενώ η στροφορμή στον άξονα συμμετρίας (βλ. (1γ')) εξελίσσεται σύμφωνα με:

$$\frac{d(I_3\omega_3)}{dt} = aF'. \quad (3)$$

18 Παρατηρήστε ότι δεν διατηρείται στην περίπτωση του κινούμενου δίσκου ούτε η  $L_3$ , λόγω της ροπής  
19 της  $F'$ , αλλά ούτε και η  $L_z = I\dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3\omega_3 \cos \theta$ , όπως θα προέκυπτε από την (2) αν η  $\omega_3$  ήταν σταθερή.  
20 Τέλος η (1β') παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d(I\dot{\theta})}{dt} - I\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_3\omega_3\dot{\phi} \sin \theta = -Ra \cos \theta - Fa \sin \theta. \quad (4)$$

21 Η ταχύτητα του ΚΜ ως προς το αδρανειακό σύστημα  $Ox'y'z'$ ,  $\mathbf{U}$ , αναλύεται στο σύστημα  $Gxyz$  ως,  
22  $\mathbf{U} = U\hat{x} + V\hat{y} + W\hat{z}$  και ικανοποιεί την

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \left. \frac{d\mathbf{U}}{dt} \right|_{Gxyz} + (\dot{\phi}\hat{z}) \times \mathbf{U} = \left( \frac{R}{m} - g \right) \hat{z} + \frac{F}{m}\hat{x} + \frac{F'}{m}\hat{y},$$

δεδομένου ότι το σύστημα  $Gxyz$  περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\dot{\phi}\hat{z}$  ως προς το  $Ox'y'z'$ , με συνιστώσες:

$$\frac{dU}{dt} - \dot{\phi}V = \frac{F}{m} \quad (5\alpha')$$

$$\frac{dV}{dt} + \dot{\phi}U = \frac{F'}{m} \quad (5\beta')$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{R}{m} - g. \quad (5\gamma')$$

23 Οι (2), (3), (4) και (5) δεν αρκούν να προσδιορίσουν την κίνηση, απαιτείται ο προσδιορισμός των  
24 αγνώστων δυνάμεων  $R$ ,  $F$  και  $F'$  που ασκούνται στο σημείο επαφής με το δάπεδο. Θα θεωρήσουμε ότι  
25 το σημείο επαφής έχει μηδενική ταχύτητα και ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και θα διερευνή-  
26 σουμε την κίνηση του δίσκου όσο είναι  $R > 0$ , όσο δηλαδή ο δίσκος βρίσκεται σε επαφή με το δάπεδο.  
27 Αυτές οι υποθέσεις αρκούν για να προσδιορισθούν οι άγνωστες δυνάμεις και να απαλειφούν.

Η συνθήκη η ταχύτητα στο σημείο επαφής του δίσκου να είναι μηδενική:

$$\mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times (a\hat{\mathbf{i}}) = 0$$

οδηγεί στις συνθήκες

$$U = a\dot{\theta} \sin \theta, \quad V = -a\omega_3, \quad W = a\dot{\theta} \cos \theta, \quad (6)$$

<sup>28</sup> διότι είναι:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times (a\hat{\mathbf{i}}) &= (\dot{\phi}\hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{y}} + \dot{\psi}\hat{\mathbf{z}}) \times a\hat{\mathbf{i}} \\ &= (\dot{\phi}\hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{y}} + \dot{\psi}(\cos \theta\hat{\mathbf{z}} + \sin \theta\hat{\mathbf{x}})) \times (a \cos \theta\hat{\mathbf{x}} - a \sin \theta\hat{\mathbf{z}}) \\ &= (\dot{\psi} \sin \theta\hat{\mathbf{x}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{y}} + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)\hat{\mathbf{z}}) \times (a \cos \theta\hat{\mathbf{x}} - a \sin \theta\hat{\mathbf{z}}) \\ &= -a\dot{\theta} \sin \theta\hat{\mathbf{x}} + a\omega_3\hat{\mathbf{y}} - a\dot{\theta} \cos \theta\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Η (6) συνδέει την ταχύτητα του ΚΜ με τις γωνιακές ταχύτητες του δίσκου και έτσι μέσω των (5) προσδιορίζονται και οι άγνωστες δυνάμεις:

$$\frac{F}{m} = \frac{d(a\dot{\theta} \sin \theta)}{dt} + a\omega_3\dot{\phi} = a\ddot{\theta} \sin \theta + a\dot{\theta}^2 \cos \theta + a\omega_3\dot{\phi} \quad (7\alpha')$$

$$\frac{F'}{m} = \frac{d(-a\omega_3)}{dt} + a\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta = a\dot{\omega}_3 + a\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta \quad (7\beta')$$

$$\frac{R}{m} = g + \frac{d(a\dot{\theta} \cos \theta)}{dt} = g + a\ddot{\theta} \cos \theta - a\dot{\theta}^2 \sin \theta. \quad (7\gamma')$$

Τελικά αντικαθιστώντας στις (2), (3) και (4) τις εκφράσεις για τις άγνωστες δυνάμεις (7) και θέτοντας  $I_3 = 2mka^2$  και  $I = mka^2$  καταλήγουμε στο κλειστό σύστημα εξισώσεων που προσδιορίζει την κίνηση του κυλιόμενου δίσκου όσο αυτός βρίσκεται σε επαφή με το δάπεδο:

$$(k+1)\ddot{\theta} + (2k+1)\omega_3\dot{\phi} \sin \theta - k\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{g}{a} \cos \theta \quad (8\alpha')$$

$$(2k+1)\dot{\omega}_3 = \dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta \quad (8\beta')$$

$$\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta - 2\omega_3\dot{\theta} = 0. \quad (8\gamma')$$

Ενώ στην κίνηση του δίσκου δεν διατηρείται καμμιά από τις στροφορμές  $L^2, L_z, L_3$  διατηρείται όμως η ενέργεια

$$E = \frac{m}{2}|\mathbf{U}|^2 + \frac{I}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{I_3}{2}\omega_3^2 + mga \sin \theta, \quad (9)$$

επειδή οι δυνάμεις της τριβής στο ακίνητο σημείο επαφής δεν παράγουν έργο. Αν ο δίσκος ολίσθαινε σε μία μη λεία επιφάνεια τότε

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}_P,$$

<sup>29</sup> όπου  $\mathbf{U}_P$  και  $\mathbf{F}$  η δύναμη της τριβής, και αν η δύναμη της τριβής  $\mathbf{F}$  αντιτίθεται στην κίνηση και  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}_P \leq 0$   
<sup>30</sup> η ενέργεια μειώνεται (βλ. κείμενο για το tippe top).

31 Αντικαθιστώντας στην (9) την (6) και τις γωνιακές ταχύτητες η ενέργεια είναι:

$$E = \frac{I}{2}\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{I + ma^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_3 + ma^2}{2}\omega_3^2 + mga \sin \theta . \quad (10)$$

Οι μη γραμμικές εξισώσεις (8) δεν επιδέχονται στην γενική περίπτωση λύση σε κλειστή μορφή και πρέπει να επιλυθούν αριθμητικά. Επικεντρωνόμαστε σε ειδικές λύσεις των (8) που προσομοιάζουν την τελική κίνηση ενός περιστρεφόμενου κέρματος επί του επιπέδου. Εξετάζουμε αν υπάρχουν λύσεις των (8) κατά τις οποίες το ΚΜ εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας  $R$  με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$  και το νόμισμα έχει σταθερή κλίση  $\theta$ . Τότε επειδή  $V = -a\omega_3$  και συγχρόνως  $V = R\Omega$  θα είναι  $\omega_3 = -(R/a)\Omega$ . Επίσης θα είναι  $\dot{\phi} = \Omega$  και η (8α') προσδιορίζει ότι η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης του δίσκου είναι:

$$\Omega^2 = \frac{g \cot \theta}{(2k + 1)R + ka \cos \theta} . \quad (11)$$

Αν δε η ακτίνα του κύκλου είναι μηδενική,  $R = 0$ , και το ΚΜ είναι ακίνητο τότε:

$$\Omega^2 = \frac{g}{ka \sin \theta} . \quad (12)$$

32 Από τις (14) και (15) προκύπτει ότι όσο μικρότερη γωνία σχηματίζει ο δίσκος με το δάπεδο τόσο μεγαλύτερη είναι η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης του δίσκου,  $\Omega$ , και μάλιστα αν  $\theta \rightarrow 0$  τότε  $\Omega \approx 1/\theta \rightarrow \infty$ .  
 33 Αυτή η σχέση εξηγεί και τον υψίσυχο ήχο που ακούγεται όταν ο δίσκος σχηματίζει μικρή γωνία με το  
 34 δάπεδο: ο αέρας που βρίσκεται σε επαφή με τον δίσκο διεγείρεται με την συχνότητα περιστροφής του  
 35 δίσκου και συν τω χρόνω απειρίζεται καθώς η γωνία που σχηματίζει ο δίσκος με το δάπεδο τείνει στο  
 36 μηδέν. Βεβαίως, η γωνία που σχηματίζει ο δίσκος με το δάπεδο τείνει να μηδενιστεί επειδή ασκούνται  
 37 και άλλες τριβές οι οποίες μειώνουν την ενέργεια του δίσκου και οι οποίες δεν είχαν συμπεριληφθεί.  
 38

Ποιά είναι η πηγή της τριβής που οδηγεί στην απόσβεση της κίνησης του δίσκου έχει αποτελέσει θέμα διχογνωμίας τα τελευταία χρόνια<sup>2</sup>. Η αρχική συζήτηση άρχισε με τον Keith Moffatt που πρότεινε το 2000 ότι η τριβή που οδηγεί τον δίσκο στην ηρεμία προέρχεται κυρίως από το ξώδες του αέρα που τίθεται σε κίνηση κάτω από το νόμισμα. Ο Keith Moffatt υπολόγισε ότι η τριβή αυτή οδηγεί σε ρυθμό

<sup>2</sup>Βλ. Moffatt, H. K., 2000: Euler's disk and its finite-time singularity, *Nature*, **404**, 833-834, <https://doi.org/10.1038/35009017>, van den Engh, G., Nelson, P. & Roach, J., 2000: Numismatic gyrations, *Nature*, **408**, 540, <https://doi.org/10.1038/35046209>, και η απάντηση του Moffatt, H., 2000: Numismatic gyrations. *Nature*, **408**, 540 (2000) <https://doi.org/10.1038/35046211>, Bildsten, L. 2002: Viscous dissipation for Euler's disk, *Phys. Rev. E*, **66**, 056309, <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.056309>. Πειράματα δείξαν τελικά ότι η κύρια πηγή της τριβής είναι η τριβή κύλισης βλ. Easwar, K., Rouyer, F., & Menon, N., 2002: Speeding to a stop: The finite-time singularity of a spinning disk, *Phys. Rev. E*, **66**, 045102(R) <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.045102>, Ma Daolin, Liu Caishan, Zhao Zhen and Zhang Hongjian. 2014: Rolling friction and energy dissipation in a spinning disc. *Proc. R. Soc. A*, **470**, 0191, <http://doi.org/10.1098/rspa.2014.0191>.

ανάλωσης της ενέργειας του δίσκου<sup>3</sup>

$$\Phi \approx \frac{\mu\pi g a^2}{k\theta^2}. \quad (14)$$

39 έτσι ώστε η ενέργεια του δίσκου, όταν  $\theta \ll 1$

$$E = \frac{3}{2}mga \sin \theta \approx \frac{3}{2}mga\theta, \quad (15)$$

40 να μειώνεται με τον ρυθμό  $\Phi$  και επομένως

$$\frac{dE}{dt} = \frac{3}{2}mga\dot{\theta} \approx -\Phi = -\frac{\mu\pi g a^2}{k\theta^2}, \quad (16)$$

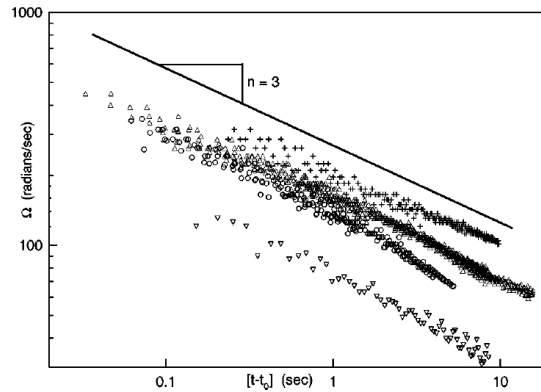
41 ή

$$\dot{\theta} = -\frac{\lambda_v}{\theta^2}, \quad \lambda_v = \frac{2}{3} \frac{\mu\pi a}{km}. \quad (17)$$

Αν η κύρια πηγή είναι η τριβή κύλισης τότε

$$\Phi = \mu m g a \cos \theta \Omega \approx \mu m g a \sqrt{\frac{g}{ka}} \frac{1}{\theta^{1/2}}, \quad (18)$$

και



**Σχήμα 2:** Τα τελικά στάδια της εξέλιξης της γωνιακής ταχύτητας της μετάπτωσης του δίσκου  $\Omega$  (σε rad/s) συναρτήσει του χρόνου σε  $t - t_0$  (s) για έναν ατσάλινο δίσκο (με  $a = 3.7$  cm,  $m = 440$  g) επί γυάλινης (+), ατσάλινης ( $\Delta$ ), λίθινης ( $\nabla$ ) επιφάνειας και για ένα ατσάλινο δακτυλίδι (o) αντίστοιχης ακτίνας και μάζας επί ατσάλινης επιφάνειας. Η  $\Omega$  αποκλίνει σύμφωνα με τον νόμο  $\Omega(t) \sim (t - t_0)^{-1/n}$  με  $n = 3$ , συμβατή με ρυθμό ανάλωσης της ενέργειας  $\Phi \sim \theta^{-1/2}$  της τριβής κύλισης (από Easwar, K., Rouyer, F., & Menon, N., 2002: Speeding to a stop: The finite-time singularity of a spinning disk, *Phys. Rev. E*, **66**, 045102(R)).

<sup>3</sup>Η εξάρτηση αυτή προκύπτει ως εξής: στην περίπτωση της τριβής από το ιξώδες του συμπιεζόμενου αέρα ο ρυθμός ανάλωσης της ενέργειας είναι  $\Phi = -\int_V dV \mu |\nabla \mathbf{u}|^2$  όπου  $\mu$  είναι το ιξώδες του αέρα,  $V$  ο όγκος του συμπιεζόμενου από τον δίσκο αέρα και  $\mathbf{u}$  η ταχύτητα του αέρα. Αν η γωνία  $\theta$  που σχηματίζει ο δίσκος με το δάπεδο είναι μικρή  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$  τότε  $|\nabla \mathbf{u}| \approx r\Omega / (r\theta) = \Omega / \theta$ , όπου  $r\Omega$  η κυκλική ταχύτητα του αέρα που βρίσκεται σε απόσταση  $r$  από τον στιγμιαίο κατακόρυφο άξονα στο σημείο επαφής του δίσκου με το επίπεδο και  $r\theta$  το κατακόρυφο ύψος του δίσκου στο σημείο αυτό. Ο όγκος του αέρα που συμπιέζεται  $\approx \pi a^2 \times a\theta$  και ο ρυθμός ανάλωσης της ενέργειας είναι:

$$\Phi \approx \pi \mu a^3 \theta \frac{\Omega^2}{\theta^2} = -\frac{\mu\pi g a^2}{k\theta^2}. \quad (13)$$

Δηλαδή η τριβή αυξάνεται όσο μικραίνει η γωνία και  $\Phi \sim -\theta^{-2}$ .

$$\dot{\theta} = -\frac{\lambda_r}{\theta^{1/2}}, \quad \lambda_r = \frac{2}{3}\mu\sqrt{\frac{g}{ak}}. \quad (19)$$

Επομένως αν  $t_0$  είναι ο χρόνος που προβλέπεται να σταματήσει ο δίσκος τότε στην περίπτωση τριβής από το ιξώδες του αέρα θα έχουμε

$$\theta(t) = (3\lambda_v)^{1/3}(t_0 - t)^{1/3}, \quad \Omega(t) = \sqrt{\frac{g}{ka}} \frac{1}{(3\lambda_v)^{1/6}(t_0 - t)^{1/6}} \quad (t < t_0),$$

ενώ στην περίπτωση της τριβής κύλισης προβλέπεται η εξής εξάρτηση:

$$\theta(t) = \left(\frac{3\lambda_r}{2}\right)^{2/3} (t_0 - t)^{2/3}, \quad \Omega(t) = \sqrt{\frac{g}{ka}} \frac{1}{(3\lambda_r/2)^{1/3}(t_0 - t)^{1/3}} \quad (t < t_0).$$

43 Η σημαντική παρατήρηση είναι ότι η παύση της κίνησης του δίσκου επιτυγχάνεται σε πεπερασμένο  
44 χρόνο στον οποίο χρόνο η γωνιακή ταχύτητα σχηματίζει ανωμαλία απειριζόμενη. Και στις δύο περι-  
45 πτώσεις η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης αποκλίνει στον χρόνο  $t_0$  συγχρόνως με το σταμάτημα της  
46 περιστροφής του δίσκου. Τα πειράματα έδειξαν ότι στα τελικά στάδια και ανεξάρτητα αν ο δίσκος εί-  
47 ναι συμπαγής ή δακτύλιος (βλ. Σχ. 2) η  $\Omega$  αποκλίνει με το νόμο δύναμης  $\Omega \sim (t_0 - t)^{-1/3}$  που δείχνει  
48 ότι ο κύριος μηχανισμός ανάλωσης είναι η τριβή κύλισης.

49 Ο σχηματισμός ανωμαλιών σε πεπερασμένο χρόνο, όπως ο απειρισμός της  $\Omega$ , συνήθως αποφεύ-  
50 γεται στη φύση. Στην περίπτωση του δίσκου αποφεύγεται η ανωμαλία διότι όπως μειώνεται η γωνία  
51  $\theta$  και αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$  η αντίδραση του δαπέδου, που για μικρές γωνίες είναι κατά  
52 προσέγγιση (βλ. (7γ'))

$$\begin{aligned} \frac{R}{m} &= g + \frac{d(a\dot{\theta} \cos \theta)}{dt} \\ &\approx g + a\ddot{\theta} = g - \frac{a\lambda_r^2}{2\theta^2}, \end{aligned}$$

αλλάζει πρόσημο και ο δίσκος χάνει επαφή με το δάπεδο αποφεύγοντας το σχηματισμό έτσι της ανω-  
μαλίας και ο δίσκος προσγειώνεται τελικά στο δάπεδο αιωρούμενος. Υποθέτοντας ανάλωση της ενέρ-  
γειας από τριβή κύλισης της μορφής (21) για ένα δίσκο Euler του εμπορίου υπολογίζουμε με συντελε-  
στή  $\lambda_r = 0.024 \text{ s}^{-1}$  ( $m = 440 \text{ g}$ ,  $a = 3.7 \text{ cm}$  και συντελεστή τριβής κύλισης  $\mu = 0.001$ ) ότι ο δίσκος χάνει  
επαφή με το δάπεδο όταν η γωνία γίνει

$$\theta_c \approx \lambda_r \sqrt{\frac{a}{2g}} \approx 0.06^\circ,$$

που συμβαίνει μόνο

$$t_0 - t_c = \frac{2\theta_c^{2/3}}{3\lambda_r} \approx 0.28 \text{ s},$$

53 πριν το σχηματισμό της ανωμαλίας εκπέμποντας ήχο συχνότητας  $\Omega_c \approx 1000/(2\pi) \text{ Hz}$ . Τόσο κοντά  
54 φτάνει ο δίσκος του Euler στο χείλος του γκρεμού.

55 Η συνεχής αύξηση του εκπεμπόμενου ήχου και η κατάρρευση του δίσκου του Euler σε πεπερασμένο

56 χρόνο είναι παρόμοια με το τελευταίο στάδιο εξέλιξης δύο περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίου ή δύο  
57 μελανών οπών πριν συγχωνευτούν<sup>4</sup>. Στην περίπτωση αυτή η περιστροφική ενέργεια του ζεύγους εί-  
58 ναι  $\sim \Omega^{2/3}$ , όπου  $\Omega$  η συχνότητα περιστροφής του ζεύγους, και ο ρυθμός ανάλωσης της ενέργειας  
59 του συστήματος που επιτελείται με την εκπομπή βαρυτικών κυμάτων είναι  $\Phi \sim \Omega^{10/3}$ . Η μείωση της  
60 ενέργειας του συστήματος οδηγεί τα αστέρια να πλησιάζουν το ένα το άλλο εκπέμποντας βαρυτικά  
61 κύματα ολοένα μεγαλύτερης συχνότητας που αναφέρεται ως κυματικό κελάηδισμα (wave chirp). Η  
62 συχνότητα περιστροφής του ζεύγους και η συχνότητα εκπομπής των βαρυτικών κυμάτων συμπεριφέ-  
63 ρεται ως  $\Omega \sim (t_0 - t)^{-3/8}$  και τελικά θα απειριζόταν, όπως στον δίσκο του Euler, στον πεπερασμένο  
64 χρόνο  $t_0$ , πλην όμως οι παλιρροϊκές δυνάμεις που αναπτύσσονται διαμελίζουν τα σώματα σε χρόνο  
65  $t < t_0$  ενώ συγχωνεύονται. Τέτοια παρατήρηση<sup>5</sup> έγινε το 2015 από τους ανιχνευτές βαρυτικών κυμά-  
66 των της κοινοπραξίας LIGO-Virgo επιβεβαιώνοντας την πρόβλεψη της γενικής θεωρίας της σχετικότη-  
67 τας για την ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων. Στην περίπτωση αυτή συγχωνεύτηκαν δύο περιστρεφόμενες  
68 μαύρες τρύπες και οι ανιχνευτές κατέγραψαν wave chirp που σάρωσε τις συχνότητες 35 – 250 Hz σε  
69 0.15 s.

70 Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει το πρόβλημα του σχηματισμού ανωμαλιών σε πεπερασμένο χρόνο  
71 στην υδροδυναμική. Σε γενικές γραμμές το ερώτημα είναι: μπορεί να απειρισθεί σε πεπερασμένο  
72 χρόνο ο στροβιλισμός του πεδίου ταχυτήτων του ρευστού αν αρχικά το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού εί-  
73 ναι λείο; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δεν έχει δοθεί ακόμα και στην περίπτωση που το ρευστό είναι  
74 χωρίς ιξώδες και εξελίσσεται με τις εξισώσεις του Euler. Ο δίσκος του Euler μας δείχνει ότι ανωμαλίες  
75 μπορούν να σχηματιστούν σε πεπερασμένου χρόνου ακόμα και αν υπάρχουν αναλωτικές διαδικασίες,  
76 μάλιστα στην περίπτωση του δίσκου ή της συγχώνευσης μελανών οπών οι ανωμαλίες εμφανίζονται  
77 ακριβώς λόγω της ύπαρξης αναλωτικών διαδικασιών.

78

## 79 Πρόβλημα

80 Θεωρήστε ένα δίσκο του Euler επί ενός επιπέδου (βλ. Σχ. 1). Μελετήστε την ευστάθεια των εξής  
81 κινήσεων του δίσκου α) ο δίσκος κυλιέται με σταθερές γωνιακές ταχύτητες  $\omega_3 \neq 0$ ,  $\Omega = 0$  και υπό  
82 γωνία  $\theta = \pi/2$ , β) ο δίσκος περιστρέφεται περί μία κατακόρυφο διάμετρο με  $\Omega \neq 0$  ενώ είναι  $\omega_3 = 0$   
83 και  $\theta = \pi/2$ , γ) ο δίσκος περιστρέφεται με σταθερές γωνιακές ταχύτητες  $\Omega = \sqrt{g/(ka \sin \theta_0)}$ ,  $\omega_3 = 0$   
84 περί το ΚΜ, που είναι ακίνητο, υπό γωνία  $\theta = \theta_0$ .

85

---

<sup>4</sup>Cutler, C. et al., 1993: The last three minutes: Issues in gravitational wave measurements of coalescing compact binaries, *Phys. Rev. Letters*, **70**, 2984-2987 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.70.2984>.

<sup>5</sup>Abbot, B.P. et al, 2016: Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 061102 <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.