

### Τελική εξέταση στη Μηχανική του Μεταπτυχιακού-2024-2025

1. (α) Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$  γράψτε τη Λαγκρανζιανή σωματιδίου μάζας  $m = 1$  που κινείται σε σφαιρικά συμμετρικό δυναμικό.

(β) Δείξτε ότι οι ποσότητες  $A = p_\phi$  και  $B = p_\theta^2 + (p_\phi^2 / \sin^2 \theta)$  διατηρούνται κατά την κίνηση, όπου  $p_\phi$  και  $p_\theta$  είναι οι ορμές συζυγείς στις μεταβλητές  $\phi$  και  $\theta$ , αντίστοιχα.

(γ) Ποια είναι η φυσική ερμηνεία των ποσοτήτων  $A$  και  $B$ ;

(δ) Γράψτε την εξίσωση που διέπει την εξέλιξη της συντεταγμένης  $r$  και δείξτε ότι αυτή μπορεί να γραφεί στη μορφή  $\dot{r}^2 = f(r)$ , και επομένως η εξέλιξη της  $r$  προσδιορίζεται αντιστρέφοντας την  $t = F(r)$ , όπου  $F(r)$  είναι ένα ολοκλήρωμα.

(ε) Έστω ότι το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση σε ένα επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων (και κέντρο του πεδίου) και σχηματίζει γωνία  $\psi < \pi/2$  με το επίπεδο  $\theta = \pi/2$ . Προσδιορίστε την  $p_\theta(\theta)$  και δείξτε ότι έχει δύο ρίζες που προσδιορίζονται από την τριγωνομετρική σχέση  $\sin \theta = \cos \psi$ .

2. (α) Η δυναμική φυσικού συστήματος  $n$  βαθμών ελευθερίας προσδιορίζεται από τη Λαγκρανζιανή  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  όπου  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  και  $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}/dt$ . Το σύστημα είναι αναλλοίωτο στον συνεχή και διαφορίσιμο μετασχηματισμό συμμετρίας ως προς την πραγματική παράμετρο  $\varepsilon$ :  $\mathbf{q}(t) \rightarrow \mathbf{Q}(\varepsilon, t)$  με  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(0, t)$ . Διατυπώστε και αποδείξτε με προσοχή το θεώρημα Noether για αυτήν την περίπτωση.

(β) Η κίνηση ενός συστήματος με καρτεσιανές συντεταγμένες  $(q_1, q_2, q_3)$  διέπεται από τη Λαγκρανζιανή:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - \lambda(q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3),$$

όπου  $\lambda$  κάποια σταθερά. Δείξτε ότι η  $L$  είναι αναλλοίωτη σε στροφές περί τον άξονα  $(1, 1, 1)$  του  $q$ -χώρου. Εξ αυτού προσδιορίστε τη διατηρούμενη ποσότητα. Προσδιορίστε και μία άλλη διατηρούμενη ποσότητα που δεν συνδέεται με την προηγούμενη συμμετρία.

3. Λόγω της περιστροφής της, η Γη, συνολικής μάζας  $M$ , δεν είναι ακριβώς σφαιρική και έχει μια μικρή πλάτυνση στον ισημερινό. Μία συνήθης και επιτυχημένη προσέγγιση αυτής της παραμόρφωσης είναι να θεωρήσουμε ότι η Γη είναι μία ομογενής σφαίρα μάζας  $M(1 - \varepsilon)$  στην οποία έχει προστεθεί στον ισημερινό ένας ομογενής λεπτός κυκλικός δακτύλιος μάζας  $\varepsilon M$ .

(α) Εάν ο δακτύλιος αυτός είναι πολύ λεπτός υπολογίστε το δυναμικό σε απόσταση  $r$  και επί του άξονα συμμετρίας της Γης.

(β) Δείξτε ότι έχει ανάπτυγμα της μορφής

$$V(r) = \frac{k_1}{r} + \frac{k_3}{r^3} + \frac{k_5}{r^5} + \dots$$

Υπολογίστε τους συντελεστές  $k_1$ ,  $k_3$  και  $k_5$  συναρτήσει των  $M$ ,  $\varepsilon$ ,  $G$  και της ακτίνας της Γης  $R$ .

(γ) Αν η Γή θεωρούνταν σφαιρική η επιτάχυνση της βαρύτητας στον Βόρειο Πόλο θάταν  $g_0$ . Υπολογίστε την ποσοστιαία μεταβολή στην επιτάχυνση της βαρύτητας που προκαλείται στο Βόρειο Πόλο από την πλάτυνση χρησιμοποιώντας για την εκτίμηση αυτή μόνο τους πρώτους δύο όρους του αναπτύγματος του δυναμικού.

(δ) Υπολογίστε την ποσοστιαία μεταβολή της  $g$  στο Βόρειο Πόλο από την πλάτυνση κατευθείαν από το δυναμικό που υπολογίσατε στην (α) και δείξτε ότι η εκτίμηση στην οποία είχατε συμπεριλάβει μόνο τους δύο όρους του αναπτύγματος δεν είναι καλή.

Δίδεται:  $\varepsilon = 6 \times 10^{-3}$  και  $1 - 2^{-3/2} = 0.6464$ .

4. Οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας  $\omega$  και του διανύσματος θέσης  $\mathbf{r}$  δίδονται στο καρτεσιανό σύστημα του σώματος.

(α) Η κινητική ενέργεια ενός στερεού σώματος ορίζεται ως  $T = 1/2 \int dm(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ . Δείξτε ότι στο σύστημα ΚΜ του στερεού η κινητική ενέργεια μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$T = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j ,$$

όπου τον πίνακα  $I_{ij}$  πρέπει να τον προσδιορίσετε.

(β) Εξηγήστε τι είναι οι κύριες ροπές αδράνειας.

(γ) Στερεό σώμα με κύριες ροπές αδράνειας  $I_1, I_2, I_3$ , που είναι όλες άνισες μεταξύ των, κινείται χωρίς να του ασκούνται εξωτερικές ροπές. Αποδείξτε ότι οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας του σώματος στο σύστημα του σώματος ικανοποιούν τις εξισώσεις του Euler:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 , \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 , \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 . \end{aligned}$$

(δ) Το σώμα περιστρέφεται περί τον άξονα 1. Προσδιορίστε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται ώστε η κίνηση αυτή να είναι ευσταθής.

(ε) Θεωρήστε τώρα στερεό με ροπές αδράνειας  $I_1 = I_2 = I_3/2$ . Δείξτε ότι στο σύστημα αναφοράς του σώματος το διάνυσμα  $\omega$  μεταπίπτει με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega_3$  περί τον κύριο άξονα αδρανείας 3 που είναι κάθετος στο επίπεδο του σώματος.

(στ) Συνέχεια του (ε): ποιά είναι η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης του άξονα 3 που παρατηρεί ένας εξωτερικός παρατηρητής;

5. (Φ.Χ.) Στη Νευτώνεια Μηχανική ως γνωστόν μια σημειακή μάζα στο σύστημα ΚΜ έχει μηδενική ροπή αδράνειας α) Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας πόση είναι η ροπή αδράνειας στο σύστημα ΚΜ του σημειακού σωματιδίου αν το σωματίδιο δεν έχει ηλεκτρικό φορτίο; β) Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας πόση είναι η ροπή αδράνειας στο σύστημα ΚΜ του σημειακού σωματιδίου αν το σωματίδιο έχει ηλεκτρικό φορτίο; γ) Στην κβαντική μηχανική πόση είναι η ροπή αδράνειας στο σύστημα ΚΜ σημειακού σωματιδίου αν το σωματίδιο δεν έχει ηλεκτρικό φορτίο;

Λύσεις

1α)

$$L = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - V(r) .$$

1β) Η ορμή

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

ικανοποιεί την Euler-Lagrange εξίσωση

$$\dot{p}_\phi = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 ,$$

και άρα διατηρείται.

Η  $\theta$  Euler-Lagrange εξίσωση είναι

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 ,$$

με  $p_\theta = r^2 \dot{\theta}$ . Επομένως είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) &= 2p_\theta \dot{p}_\theta - 2 \frac{p_\phi^2}{\sin^3 \theta} \cos \theta \dot{\theta} \\ &= 2(r^2 \dot{\theta})(r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2) - 2 \frac{r^4 \sin^4 \theta \dot{\phi}^2}{\sin^3 \theta} \cos \theta \dot{\theta} \\ &= 0, \end{aligned}$$

και συνεπώς διατηρείται και η ποσότητα  $B$ .

1γ) Η στροφορμή του σωματιδίου είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= r \hat{\mathbf{r}} \times (\dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}) \\ &= r^2 \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\phi}} - r^2 \sin \theta \dot{\phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= p_\theta \hat{\boldsymbol{\phi}} - \frac{p_\phi}{\sin \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

Η ποσότητα  $B$  είναι το τετράγωνο της στροφορμής

$$L^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} ,$$

και η  $A$  είναι η συνιστώσα  $L_z$  της στροφορμής στον άξονα  $z$ :

$$L_z = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{z}} = - \frac{p_\phi}{\sin \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = p_\phi .$$

1δ) Η ενέργεια επίσης διατηρείται η οποία είναι:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) + V(r) \\ &= \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} + V(r) , \end{aligned}$$

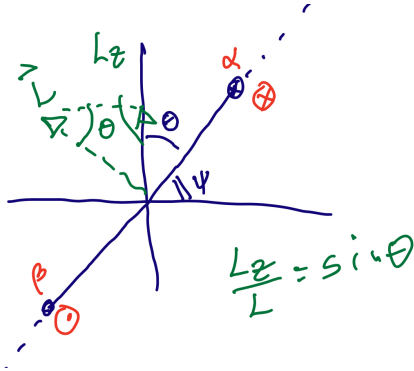
επομένως

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2} \sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2r^2}} ,$$

και τελικά

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - V(r) - L^2/(2r^2)}} ,$$

1ε)



Από τη διατήρηση της  $B = L^2$  και της  $A = L_z$  έχουμε αμέσως:

$$p_\theta^2 = L^2 \frac{\sin^2 \theta - L_z^2/L^2}{\sin^2 \theta} .$$

Η διατομή της κυκλικής τροχιάς φαίνεται στο σχήμα. Στα σημεία α και β του σχήματος όπου  $\sin \theta = \cos \psi$  η ταχύτητα έχει συνισταμένη μόνο στη διεύθυνση  $\hat{\phi}$  και επομένως μηδενίζεται στις δύο γωνίες στις οποίες είναι  $\sin \theta = \cos \psi$ .

2α) Ο συνεχής μετασχηματισμός  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{Q}(\varepsilon, t)$  με  $\mathbf{Q}(0, t) = \mathbf{q}$  λέγεται συμμετρία της Λαγκρανζιανής εάν  $L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + O(\varepsilon^2)$ . Θεώρημα Noether: Εάν ο συνεχής μετασχηματισμός  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{Q}(\varepsilon, t)$  είναι συμμετρία της Λαγκρανζιανής τότε κατά την εξέλιξη του συστήματος διατηρείται το εσωτερικό γινόμενο της γενικευμένης ορμής  $\mathbf{p}$  με τον γεννήτορα του μετασχηματισμού  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{K} , \quad \mathbf{K} = \left. \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} .$$

Απόδειξη

Έστω  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{Q}(\varepsilon, t)$  μετασχηματισμός συμμετρίας που εφαρμόζεται σε τροχιά του συστήματος  $\mathbf{q}(t)$  που ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} .$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) &= L(\mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{K} + O(\varepsilon^2), \dot{\mathbf{q}} + \varepsilon \dot{\mathbf{K}} + O(\varepsilon^2)) \\
&= L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \varepsilon \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{K} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{K}} \right) + O(\varepsilon^2) \\
&= L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \varepsilon (\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{K}}) + O(\varepsilon^2) \\
&= L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \varepsilon \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{K}) + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

Επομένως αν είναι συμμετρία ο  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{Q}(\varepsilon, t)$  θα είναι

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{K}) = 0$$

που σημαίνει ότι διατηρείται η  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{K}$ . ο.ε.δ.

2β) Ο μετασχηματισμός συμμετρίας είναι στροφή περί τον άξονα  $(1, 1, 1)$  δηλαδή

$$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} + \varepsilon(1, 1, 1) \times (q_1, q_2, q_3) ,$$

με γεννήτορες

$$K_1 = q_3 - q_2 , \quad K_2 = q_1 - q_3 , \quad K_3 = q_2 - q_1 .$$

Διαφορικοί μετασχηματισμοί στροφής όπως ο παραπάνω αφήνουν αναλλοίωτες σε πρώτη τάξη τις ποσότητες  $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2$  και  $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ . Απομένει να δείξουμε ότι παραμένει αναλλοίωτο και το  $q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3$ . Πράγματι:

$$\begin{aligned}
q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 &\rightarrow (q_1 + \varepsilon K_1)(q_2 + \varepsilon K_2) + (q_1 + \varepsilon K_1)(q_3 + \varepsilon K_3) + (q_2 + \varepsilon K_2)(q_3 + \varepsilon K_3) \\
&= q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 + \varepsilon(q_2 K_1 + q_1 K_2 + q_3 K_1 + q_1 K_3 + q_2 K_3 + q_3 K_2) + O(\varepsilon^2) \\
&= q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 + \varepsilon(K_1(q_2 + q_3) + K_2(q_1 + q_3) + K_3(q_1 + q_2)) + O(\varepsilon^2) \\
&= q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 + \varepsilon(q_3^2 - q_2^2 + q_1^2 - q_3^2 + q_2^2 + q_1^2) + O(\varepsilon^2) \\
&= q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

Η διατηρούμενη ποσότητα είναι

$$p_1 K_1 + p_2 K_2 + p_3 K_3 = \dot{q}_1(q_3 - q_2) + \dot{q}_2(q_1 - q_3) + \dot{q}_3(q_2 - q_1) .$$

Άλλη διατηρούμενη ποσότητα είναι η ενέργεια:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + \lambda(q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3) ,$$

3α) Το δυναμικό στον άξονα συμμετρίας και σε απόσταση  $r$  από το ΚΜ της Γης, που είναι στο κέντρο της σφαίρας, είναι:

$$V(r) = -\frac{GM(1-\varepsilon)}{r} - \frac{G\varepsilon M}{\sqrt{r^2 + R^2}}$$

3β) Επειδή:

$$\begin{aligned}(r^2 + R^2)^{-1/2} &= r^{-1} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)^{-1/2} \\ &= r^{-1} \left(1 - \frac{R^2}{2r^2} + \frac{3}{8} \frac{R^4}{r^4} + \dots\right),\end{aligned}$$

το δυναμικό έχει το ανάπτυγμα

$$\begin{aligned}V(r) &= -\frac{GM(1-\varepsilon)}{r} - \frac{G\varepsilon M}{r} \left(1 - \frac{R^2}{2r^2} + \frac{3}{8} \frac{R^4}{r^4} + \dots\right) \\ &= \frac{k_1}{r} + \frac{k_3}{r^3} + \frac{k_5}{r^5} + \dots,\end{aligned}$$

με

$$k_1 = -GM, \quad k_3 = \frac{1}{2}\varepsilon GMR^2, \quad k_5 = -\frac{3}{8}\varepsilon GMR^4.$$

3γ) Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι

$$\begin{aligned}g &= \left| \frac{dV}{dr} \right| \\ &\approx \frac{GM}{r^2} - \frac{3}{2}\varepsilon GM \frac{R^2}{r^4}\end{aligned}$$

Στον Βόρειο Πόλο είναι  $r = R$  και

$$g_N = \frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2}\right),$$

ενώ η επιτάχυνση αν θεωρούνταν η Γη σφαιρική είναι

$$g_0 = \frac{GM}{R^2},$$

επομένως η ποσοστιαία μεταβολή από την πλάτυνση είναι:

$$\delta g = 100 \frac{g_N - g_0}{g_0} \approx -100 \frac{3\varepsilon}{2} = -0.9\%.$$

3δ) Αν δεν κάναμε προσέγγιση από τη 3α έχουμε

$$g = \frac{GM(1-\varepsilon)}{r^2} + \frac{G\varepsilon Mr}{(r^2 + R^2)^{3/2}}$$

και στον πόλο

$$g_N = \frac{GM(1-\varepsilon)}{R^2} + 2^{-3/2} \frac{G\varepsilon M}{R^2} = \frac{GM}{R^2} (1 - \varepsilon(1 - 2^{-3/2}))$$

και αυτό δίνει:

$$\delta g = 100 \frac{g_N - g_0}{g_0} \approx -0.4\%.$$

4δ) Διαταράσσουμε την περιστροφή περί τον  $\omega_1 = \omega_{10}$  που είναι κατάσταση ισορροπίας. Μικρές διαταραχές ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}'_1 &= 0, \\ I_2 \dot{\omega}'_2 &= (I_3 - I_1) \omega_{10} \omega'_3, \\ I_3 \dot{\omega}'_3 &= (I_1 - I_2) \omega_{10} \omega'_2. \end{aligned}$$

Συνεπώς μικρές διαταραχές εξελίσσονται σύμφωνα με την

$$I_3 I_2 \ddot{\omega}'_2 = (I_3 - I_1) \omega_{10} I_3 \dot{\omega}'_3 = (I_3 - I_1)(I_1 - I_2) \omega_{10}^2 \omega'_2.$$

Για να έχω ευστάθεια οι διαταραχές δεν πρέπει να αυξάνονται εκθετικά και επομένως απαιτείται οι ροπές αδράνειας να ικανοποιούν την ανισότητα

$$(I_3 - I_1)(I_1 - I_2) < 0$$

που σημαίνει ότι αν είναι  $I_3 - I_1 > 0$  πρέπει να είναι και  $I_1 - I_2 < 0$ , δηλαδή η  $I_1$  να είναι η μικρότερη ροπή αδράνειας, και αν είναι  $I_3 - I_1 < 0$  πρέπει να είναι και  $I_1 - I_2 > 0$ , δηλαδή η  $I_1$  να είναι η μεγαλύτερη ροπή αδράνειας.

4ε) Οι εξισώσεις του Euler προσδιορίζουν την κίνηση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας στο σύστημα αναφοράς του σώματος. Με αυτές τις ροπές αδράνειας οι εξισώσεις Euler είναι

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\omega_2 \omega_3, \\ \dot{\omega}_2 &= \omega_3 \omega_1, \\ \dot{\omega}_3 &= 0. \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι το  $\omega_3 = \omega_{30}$  παραμένει σταθερό ενώ οι άλλες συνισταμένες ικανοποιούν τις εξισώσεις  $\ddot{\omega}_2 + \omega_{30}^2 \omega_2 = 0$ ,  $\ddot{\omega}_3 + \omega_{30}^2 \omega_3 = 0$  δηλαδή το διάνυσμα της στροφορμής μεταπίπτει περί τον άξονα 3 με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega_3$ .

4στ) Το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα 3 σύμφωνα με έναν αδρανειακό παρατηρητή εξελίσσεται σύμφωνα με

$$\frac{d\hat{\mathbf{3}}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{3}} \quad (1)$$

αλλά είναι

$$\mathbf{L} = I_1 \boldsymbol{\omega} + (I_3 - I_1) \omega_3 \hat{\mathbf{3}} = I_1 \boldsymbol{\omega} + I_1 \omega_3 \hat{\mathbf{3}} ,$$

και εξ' αυτού

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{L}}{I_1} - \omega_3 \hat{\mathbf{3}}. \quad (2)$$

Επομένως από την (1) έχουμε

$$\frac{d\hat{\mathbf{3}}}{dt} = \left( \frac{\mathbf{L}}{I_1} - \omega_3 \hat{\mathbf{3}} \right) \times \hat{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{L}}{I_1} \times \hat{\mathbf{3}}. \quad (3)$$

Η συνολική στροφορμή όμως διατηρείται και ένας αδρανειακός παρατηρητής σύμφωνα με την (3) βλέπει τον άξονα 3 να μεταπίπτει περί το σταθερό διάνυσμα της στροφορμής με γωνιακή ταχύτητα  $|\mathbf{L}|/I_1$ .