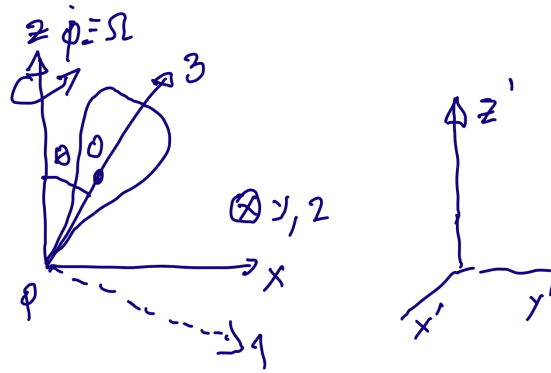


Ο στροβός του Lagrange

23 Ιανουαρίου 2025

0.1 Εισαγωγικά



Σχήμα 1: Ο στροβός του Lagrange είναι ένα αξισυμμετρικό σώμα που περιστρέφεται περί το σταθερό άκρο του P στο ομογενές πεδίο βαρύτητας. Το ΚΜ του σώματος O είναι σε απόσταση a από το P . Ο άξονας συμμετρίας σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο PZ . Λαμβάνουμε το σύστημα του σώματος 123 με αρχή το P , το καρτεσιανό σύστημα XYZ με αρχή το P και $PX \perp PZ$ στο επίπεδο $ZP3$ και το αδρανειακό σύστημα $X'Y'Z'$. Οι γωνίες Euler (ϕ, θ, ψ) λαμβάνονται ως προς το αδρανειακό σύστημα $X'Y'Z'$ όπου ο άξονας Z' είναι κατακόρυφος. Η ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας PX με τον X' , η θ η γωνία $\angle ZP3$ και ψ η γωνία που έχει περιστραφεί το σώμα περί τον άξονα 3.

2 Ο στροβός του Lagrange είναι μία αξισυμμετρική σβούρα που περιστρέφεται περί το αιχμηρό άκρο
3 της στο ομογενές πεδίο βαρύτητας (βλ. Σχ. 1). Αυτό που χαρακτηρίζει τον στροβό του Lagrange είναι
4 ότι το σημείο περιστροφής είναι σταθερό. Η αξισυμμετρικότητα του σώματος και η περιστροφή περί
5 το σταθερό σημείο P επιτρέπουν την ολοκλήρωση των εξισώσεων της κίνησης.

6 Η θέση του σώματος προσδιορίζεται από τις γωνίες Euler (ϕ, θ, ψ) ως προς ένα αδρανειακό σύστημα
7 $X'Y'Z'$ με τον άξονα Z' κατακόρυφο (βλ. Σχ. 1). Ο άξονας συμμετρίας του σώματος $P3$ σχηματίζει
8 γωνία θ με την κατακόρυφο. Για τον προσδιορισμό της κίνησης του στροβού λαμβάνουμε δύο άλλα μη
9 αδρανειακά πλαίσια. Το XYZ με αρχή το P και $PX \perp PZ$ στο επίπεδο $ZP3$, ώστε ϕ να είναι η γωνία που
10 σχηματίζει ο άξονας PX με τον X' , και το σύστημα 123 με αρχή το P και άξονα $P1 \perp P3$ στο επίπεδο
11 $ZP3$. Ο τρίτος άξονας $P2$ ταυτίζεται με τον τρίτο άξονα PZ του XYZ . Η γωνία ψ είναι η γωνία που
12 περιστρέφεται το σώμα περί τον άξονα 3. Προσέξτε ότι οι άξονες 1 και 2 δεν περιστρέφονται με το
13 σώμα περί τον άξονα 3, επειδή όμως το σώμα είναι αξισυμμετρικό οι άξονες 1 και 2 συνεχίζουν να
14 είναι κύριοι άξονες του τανυστή ροπών αδράνειας. Τα $\hat{1}$, $\hat{2}$ και $\hat{3}$ είναι μοναδιαία διανύσματα στους
15 άξονες του 123 ενώ τα \hat{x} , \hat{y} και \hat{z} είναι μοναδιαία διανύσματα του XYZ .

Τα συστήματα XYZ και 123 δεν είναι αδρανειακά. Το καρτεσιανό σύστημα XYZ περιστρέφεται με

γωνιακή ταχύτητα

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Omega} \hat{\mathbf{z}},$$

περί το $X'Y'Z'$ και το 123 περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{y}},$$

περί το $X'Y'Z'$, ενώ το σώμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{y}} + \dot{\psi} \hat{\mathbf{3}},$$

περί το $X'Y'Z'$. Οι συνισταμένες της γωνιακής ταχύτητας του σώματος, $\boldsymbol{\omega}$, στους κύριους άξονες είναι $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Σημειώνουμε ότι $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{3}} = \cos \theta$ (βλ. Σχ. 1) και

$$\hat{\mathbf{z}} = -\sin \theta \hat{\mathbf{1}} + \cos \theta \hat{\mathbf{3}}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \cos \theta \hat{\mathbf{1}} - \sin \theta \hat{\mathbf{3}},$$

και επομένως

$$\omega_1 = -\dot{\phi} \sin \theta, \quad \omega_2 = \dot{\theta}, \quad \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.$$

16 Η στροφορμή του σώματος \mathbf{L} ως προς το σημείο περιστροφής της σβούρας, P , εξελίσσεται σύμφωνα
17 με την εξίσωση:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \underbrace{a\hat{\mathbf{3}}}_{\vec{PO}} \times (mg\hat{\mathbf{z}}) = mga\hat{\mathbf{3}} \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (1)$$

18 όπου a η απόσταση του P από το ΚΜ και $mg\hat{\mathbf{z}}$ η δύναμη της βαρύτητας. Οι ροπή αδράνειας ως προς τον
19 άξονα 3 είναι I_3 , ενώ ως προς τους άξονες 1 και 2 είναι I και επομένως η στροφορμή είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= I\omega_1 \hat{\mathbf{1}} + I\omega_2 \hat{\mathbf{2}} + I_3\omega_3 \hat{\mathbf{3}} \\ &= I\boldsymbol{\omega} + (I_3 - I)\omega_3 \hat{\mathbf{3}} \\ &= I\boldsymbol{\omega} + \frac{I_3 - I}{I_3} L_3 \hat{\mathbf{3}}, \end{aligned} \quad (2)$$

20 όπου $L_3 = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{3}}$ η συνισταμένη της στροφορμής στον άξονα 3. Από την (2) εκφράζουμε τη γωνιακή
21 ταχύτητα του σώματος $\boldsymbol{\omega}$ συναρτήσει των στροφορμών:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{L}}{I} + \frac{I - I_3}{II_3} L_3 \hat{\mathbf{3}}. \quad (3)$$

22 Στο στροβό του Lagrange ενώ δεν διατηρείται η συνολική στροφορμή L^2 διατηρείται η συνισταμένη
23 της στροφορμής στον κατακόρυφο άξονα $L_z = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ καθώς και η συνισταμένη της στροφορμής στον
24 άξονα συμμετρίας του σώματος, $L_3 = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{3}}$. Διατηρείται επίσης κι η ενέργεια του στροβού

$$E = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} + mga \cos \theta. \quad (4)$$

26 Άσκηση: Δείξτε ότι στον τροχό του Lagrange διατηρούνται οι L_z και L_3 καθώς και η ενέργεια E .

27 Λύση:

28

29 Η ροπή $mga\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}}$ δεν έχει συνισταμένη ούτε στον άξονα Z ούτε στον άξονα 3 και από την (1) προκύπτει ότι:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{3}} = 0.$$

30 Επομένως η $L_z = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ διατηρείται διότι είναι επίσης $d\hat{\mathbf{z}}/dt = 0$, δεδομένου ότι το $\hat{\mathbf{z}}$ είναι χρονοανεξάρτητο. Επειδή δε

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{3}}}{dt} &= \boldsymbol{\omega}' \times \hat{\mathbf{3}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{3}} \\ &= \left(\frac{\mathbf{L}}{I} + \frac{I-I_3}{II_3} L_3 \hat{\mathbf{3}} \right) \times \hat{\mathbf{3}} = \frac{1}{I} \mathbf{L} \times \hat{\mathbf{3}}, \end{aligned}$$

είναι

$$\mathbf{L} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{3}}}{dt} = 0,$$

31 και επομένως διατηρείται και η $L_3 = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{3}}$.

32 Ο ρυθμός μεταβολής της περιστροφικής ενέργειας είναι

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \right) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}},$$

33 διότι λόγω της συμμετρικότητας του τανυστή ροπής αδράνειας \mathbb{I} και της χρονοανεξαρτησίας του \mathbb{I} στο σύστημα 123 έχουμε

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbb{I} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}}.$$

34 Επομένως από την (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}} - mga\dot{\theta} \sin \theta \\ &= (\omega_1 \hat{\mathbf{1}} + \omega_2 \hat{\mathbf{2}} + \omega_3 \hat{\mathbf{3}}) \cdot (mga \sin \theta \hat{\mathbf{2}}) - mga\dot{\theta} \sin \theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

35 δεδομένου ότι είναι $\omega_2 = \dot{\theta}$.

36 Η διατήρηση των τριών ποσοτήτων L_z , L_3 και E επιτρέπουν τον προσδιορισμό της κίνησης με αναγωγή σε ολοκληρώματα.

37

38 Για τον προσδιορισμό των εξισώσεων κίνησης γράφουμε τη στροφορμή στο σύστημα 123 και τότε έχουμε, δεδομένου ότι το
39 123 περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}'$ ως προς το αδρανειακό,

$$\left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{123} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L} = -mga \sin \theta \hat{\mathbf{2}}, \quad (5)$$

όπου $\mathbf{L} = I\omega_1 \hat{\mathbf{1}} + I\omega_2 \hat{\mathbf{2}} + I_3\omega_3 \hat{\mathbf{3}}$. (5) Επομένως οι εξισώσεις της στροφορμής της σβούρας είναι:

$$I\dot{\omega}_1 + I_3\omega_2' \omega_3 - I\omega_3' \omega_2 = 0 \quad (6\alpha')$$

$$I\dot{\omega}_2 + I\omega_3' \omega_1 - I_3\omega_1' \omega_3 = mga \sin \theta \quad (6\beta')$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0. \quad (6\gamma')$$

Η (6α') ολοκληρώνεται δίνοντας $L_z = I\omega_1 \hat{\mathbf{1}} \cdot \hat{\mathbf{z}} + I_3\omega_3 \hat{\mathbf{3}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = I\dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3\omega_3 \cos \theta$ ενώ η (6γ') την διατήρηση της $L_3 = I_3\omega_3$. Επομένως γράφοντας $\phi = \Omega$ οι (6) είναι ισοδύναμες με το σύστημα

$$I\ddot{\theta} = (I\Omega^2 \cos \theta - I_3\omega_3 \Omega + mga) \sin \theta \quad (7\alpha')$$

$$I\Omega \sin^2 \theta + I_3\omega_3 \cos \theta = L_z \quad (7\beta')$$

$$I_3\omega_3 = L_3. \quad (7\gamma')$$

40 Δεδομένων των αρχικών τιμών των $L_z, L_3, \theta(0)$ και $\dot{\theta}(0)$ και χρησιμοποιώντας την (7β') και (7γ') για τον προσδιορισμό του ω_3 και
 41 του Ω συναρτήσει του θ η (7α') παίρνει τη μορφή

$$I\ddot{\theta} = F_{eff}(\theta) = -\frac{dV_{eff}(\theta)}{d\theta}, \quad (8)$$

42 η οποία περιγράφει μονοδιάστατη κίνηση σε δυναμικό και μπορεί να ολοκληρωθεί. Το ενεργό δυναμικό προσδιορίζεται εύκολα
 43 από τη διατήρηση της ενέργειας:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(I\omega_1^2 + I\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) + mga \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}(I\Omega^2 \sin^2 \theta + I\dot{\theta}^2 + I_3\omega_3^2) + mga \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta). \end{aligned}$$

44 και δεδομένου ότι το ω_3 είναι σταθερό το ενεργό δυναμικό στην (8) αφαιρώντας τις σταθερές είναι:

$$\begin{aligned} V_{eff}(\theta) &= \frac{1}{2}I\Omega^2 \sin^2 \theta + \frac{L_3^2}{2I_3} + mga \cos \theta \\ &= \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + mga \cos \theta. \end{aligned} \quad (9)$$

45 και επομένως η κίνηση προκύπτει από την ανάλυση της

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2(E - V_{eff}(\theta))}{I}, \quad (10)$$

46 η οποία προβλέπει περιοδική κίνηση στο θ με εύρος το πλάτος του διαστήματος $V_{eff}(\theta) \leq E$. Στο επόμενο εδάφιο εξετάσουμε τη
 47 μορφολογία του ενεργού δυναμικού της σβούρας και τις κινήσεις που προκύπτουν.

48 Πριν συζητήσουμε όμως τη γενικότερη κίνηση της σβούρας θα προσδιορίσουμε τις καταστάσεις ισορροπίας των εξισώσεων
 49 (7) στις οποίες τα θ, Ω, ω_3 έχουν σταθερές τιμές και θα εξετάσουμε την ευστάθειά τους. Οι δυνατές καταστάσεις ισορροπίας
 50 είναι:

51 (α) Κατακόρυφη περιστροφή

52 $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$ και οποιοδήποτε ω_3 . Η Ω δεν ορίζεται στην περίπτωση αυτή που άξονας 3 συμπίπτει με τον άξονα Z

(β) Μετάπτωση του άξονα σε οριζόντια θέση

$\theta = \pi/2$, οποιοδήποτε ω_3 και

$$\Omega = \frac{mga}{I_3\omega_3}.$$

(γ) Μετάπτωση του άξονα σε ενδιάμεση γωνία

$0 < \theta < \pi/2, \pi/2 < \theta < \pi, \omega_3^2 \geq 4Imga \cos \theta / I_3^2$ και

$$\Omega_{\pm} = \frac{I_3\omega_3}{2I \cos \theta} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Imga \cos \theta}{I_3^2\omega_3^2}} \right), \quad (11)$$

Όταν ο στροβός περιστρέφεται όρθιος στην κατάσταση (α) και είναι $\theta = 0$ ο στροβός λέγεται ότι κοιμάται (sleeping top). Αναφέρεται έτσι διότι είναι δύσκολο να διακρίνει κανείς αν περιστρέφεται ο στροβός ή όχι και για κάποιο παράξενο λόγο στέκεται όρθιος παρότι αυτή η κατάσταση είναι βαρυντικά ασταθής. Με την πάροδο του χρόνου, με τη μείωση της γωνιακής ταχύτητας, περιστροφής, ο στροβός ξυπνά και αρχίζει να κλυδωνίζεται όπως θα δούμε σε επόμενο εδάφιο. Είναι ενδιαφέρον ότι στις ενδιάμεσες καταστάσεις ισορροπίας (γ) για κάθε θ και ω_3 αντιστοιχούν δύο γωνιακές ταχύτητες μετάπτωσης, μία υψίσυχη και μία χαμηλότερη. Στο όριο που η σβούρα περιστρέφεται πολύ γρήγορα και είναι

$$\frac{\sqrt{Imga \cos \theta}}{I_3\omega_3} \ll 1,$$

οι δύο αυτές συχνότητες αποκλίνουν μεταξύ τους, και η μεν υψίσυχη, τάξης $O(\omega_3)$, ασυμπτωτικά είναι

$$\Omega_+ \approx \frac{I_3\omega_3}{I \cos \theta}, \quad (12)$$

η δε χαμηλόσυχνη, τάξης $O(1/\omega_3)$, ασυμπτωτικά είναι

$$\Omega_- \approx \frac{mga}{I_3\omega_3}. \quad (13)$$

53 Όταν η σβούρα μεταπίπτει με συχνότητα Ω_+ κυριαρχεί η περιστροφική ενέργεια της βαρυτικής και η συχνότητα μετάπτωσης
54 προσεγγίζει τη συχνότητα μετάπτωσης του ελεύθερου στερεού. Στη χαμηλόσυχνη μετάπτωση Ω_- κυριαρχεί η βαρυτική δύναμη
55 και η (13) προκύπτει με απλά επιχειρήματα: επειδή το σώμα περιστρέφεται πολύ γρήγορα περί τον άξονα συμμετρίας του είναι
56 $\mathbf{L} \approx L_3\hat{\mathbf{z}}$ και η στροφορμή \mathbf{L} και το $\hat{\mathbf{z}}$ περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα Ω περί τον κατακόρυφο άξονα Z σχηματίζοντας
57 γωνία θ . Η L_3 διατηρείται και συγκρίνοντας τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \approx \frac{d(L_3\hat{\mathbf{z}})}{dt} = L_3 \frac{d\hat{\mathbf{z}}}{dt} = I_3\omega_3\Omega\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}},$$

58 με την ασκούμενη ροπή ως προς το σημείο ανάρτησης $\boldsymbol{\tau} = (a\hat{\mathbf{z}}) \times (-mg\hat{\mathbf{z}})$ καταλήγουμε στη γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης
59 (13).

Προσέξτε ότι η (11) δεν περιορίζει τα ω_3 για τα οποία προκύπτουν καταστάσεις ισορροπίας όταν είναι $\theta > \pi/2$. Μάλιστα
όταν είναι $\omega_3 = 0$ και δεν περιστρέφεται περί τον άξονά της η σβούρα, η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης της σφαίρας εκφλί-
ζεται στην δεξιόστροφη και αριστερόστροφη περιστροφή του αντίστοιχου σφαιρικού εκκρεμούς περί τον κατακόρυφο άξονα με
γωνιακή ταχύτητα:

$$\Omega = \pm \frac{mga}{I \cos \theta}.$$

60 Αν διαταραχθεί η κατάσταση ισορροπίας η σβούρα αρχίζει να κλυδωνίζεται μεταβάλλοντας την κλίση της θ καθώς μεταπίπτει.
61 Αυτές οι κινήσεις λέγονται νύσεις της σβούρας (nutations).

62

63 Άσκηση: Προσδιορίστε για ποιές γωνιακές ταχύτητες περιστροφής ω_3 η κατακόρυφη θέση της σβούρας $\theta = 0$ είναι ευσταθής
64 και προσδιορίστε τη συχνότητα των νύσεων όταν η κοιμισμένη αυτή κατάσταση της σβούρας διαταραχθεί στιγμιαία.

65 Λύση:

66 Στην κατάσταση ισορροπίας $\theta = 0$ είναι $L_2 = L_3 = I_3\omega_3$ και το ενεργό δυναμικό (9) χωρίς τους σταθερούς όρους είναι:

$$\begin{aligned} V_{eff}(\theta) &= \frac{L_3^2(1 - \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + mga \cos \theta. \\ &= \frac{L_3^2}{2I} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + mga \cos \theta. \\ &= \frac{L_3^2}{2I_3} + mga + \underbrace{\left(\frac{L_3^2\omega_3^2}{4I} - mga \right)}_{=\omega_0^2} \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4). \end{aligned}$$

Επομένως αν η σβούρα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μεγαλύτερη από την

$$\omega_3^2 \geq \frac{4I m g a}{I_3^2},$$

67 τότε η όρθια θέση της σβούρας, η οποία είναι πάντα ασταθής αν το σώμα δεν περιστρεφόταν, καθίσταται ευσταθής και η συ-
68 χνότητα των νύσεων είναι $\omega_0 = \sqrt{I_3^2\omega_3^2/(4I) - mga}$.

69 Αντίστοιχα η κατάσταση $\theta = \pi$ όπου τώρα $L_2 = -L_3 = -I_3\omega_3$ είναι πάντα ευσταθής.

70

71

72 Άσκηση: Προσδιορίστε τη συχνότητα των νύσεων όταν διαταράξουμε σβούρα που μεταπίπτει με γωνιακή ταχύτητα $\Omega_0 \approx$
73 $mga/(I_3\omega_3)$ και γωνιακή ταχύτητα $\omega_3 \gg \Omega_0$.

74 Λύση:

75 Η σταθερότητα αναλύεται ευκολότερα στην περίπτωση αυτή μέσω των εξισώσεων κίνησης. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο

76 τις $(7\beta')$, $(7\gamma')$ οι εξισώσεις κίνησης (7) γίνονται:

$$I\ddot{\theta} = (I\Omega^2 \cos \theta - I_3\omega_3\Omega + mga) \sin \theta \quad (14)$$

$$I\dot{\Omega} \sin \theta + 2I\Omega\dot{\theta} \cos \theta - I_3\omega_3\dot{\theta} = 0 \quad (15)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0. \quad (16)$$

77 Έστω Ω' , θ' μικρές αποκλίσεις από την κατάσταση της σβούρας όταν αυτή περιστρέφεται σε γωνία θ_0 , μεταπίπτει με γωνιακή
78 ταχύτητα Ω_0 και έχει γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω_{30} . Δεν διαταράσσουμε την ω_3 διότι και αν διαταρασσόταν η τιμή της
79 θα ήταν σταθερή λόγω της (16) και αυτή η μεταβολή θα προσέθετε έναν σταθερό μη ομογενή όρο στις εξισώσεις που διέπουν
80 τις άλλες διαταραχές που θα οδηγούσε απλώς σε μία σταθερή γωνιακή μετατόπιση της απόκρισης της σβούρας. Επειδή είναι
81 $I\Omega_0^2 \cos \theta_0 - I_3\omega_{30}\Omega_0 + mga = 0$ μικρές αποκλίσεις από τις θ_0 , Ω_0 ικανοποιούν τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις

$$I\ddot{\theta}' = [(2I\Omega_0 \cos \theta_0 - I_3\omega_{30}) \sin \theta_0] \Omega' - [I\Omega_0^2 \sin^2 \theta_0] \theta'$$

$$I \sin \theta_0 \dot{\Omega}' + [2I\Omega_0 \cos \theta_0 - I_3\omega_{30}] \dot{\theta}' = 0.$$

Επειδή είναι $\omega_3 \gg \Omega_0$ οι εξισώσεις αυτές προσεγγίζονται με μεγάλη ακρίβεια από τις

$$I\ddot{\theta}' = -I_3\omega_{30} \sin \theta_0 \Omega' \quad (17)$$

$$I \sin \theta_0 \dot{\Omega}' - I_3\omega_{30} \dot{\theta}' = 0. \quad (18)$$

82 Επειδή όλοι οι συντελεστές των εξισώσεων αυτών είναι χρονοανεξάρτητοι οι εξισώσεις αυτές δέχονται λύσεις της μορφής $\theta' =$
83 $\hat{\theta} e^{i\omega_0 t}$ και $\Omega' = \hat{\Omega} e^{i\omega_0 t}$ όπου το ω_0 είναι η συχνότητα των ταλαντώσεων γύρω από το σημείο ισορροπίας εφόσον το ω_0 είναι
84 πραγματικό, άλλως η κατάσταση ισορροπίας είναι ασταθής. Εισάγοντας αυτές τις λύσεις στις (17), (18) έχουμε:

$$\omega_0^2 I \hat{\theta} = I_3\omega_{30} \sin \theta_0 \hat{\Omega}, \quad I \sin \theta_0 \hat{\Omega} = I_3\omega_{30} \hat{\theta},$$

από τις οποίες προκύπτει ότι το ω_0 είναι πραγματικό, η κατάσταση ισορροπίας ευσταθής και η συχνότητα των νεύσεων είναι

$$\omega_0 = \frac{I_3\omega_{30}}{I},$$

85 η οποία είναι πολύ πιο υψίσυχη από την μέση γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης $\Omega_0 = mga/(I_3\omega_{30})$.

86

87 0.2 Η γενική κίνηση της σβούρας του Lagrange

Δεδομένων L_z , L_3 και E η γενική κίνηση προκύπτει από την εξέλιξη της θ μέσω των (9) και τον προσδιορισμό της γωνιακής ταχύτητας της μετάπτωσης του άξονα από την

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I \sin^2 \theta}.$$

88