

Γιατί το tippe top γυρίζει ανάποδα όταν περιστρέφεται και ένα βρασμένο αυγό ανασηκώνεται όταν περιστρέφεται στο δάπεδο

21 Ιανουαρίου 2025

1 Το tippe top, η σβούρα στο Σχ. 1, είναι μια σφαίρα με αξισυμμετρική μεν αλλά ανομοιογενή κατα-
2 νομή μάζας έτσι ώστε το ΚΜ να μην συμπίπτει με το κέντρο της σφαίρας, αλλά, ας υποθέσουμε αρχικά
3 για απλότητα, ότι έχει ίσες ροπές αδράνειας. Όταν το tippe top δεν περιστρέφεται ισορροπεί ακίνητο
4 με το ΚΜ στη χαμηλότερη απόσταση από το δάπεδο. Αυτή είναι η κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας
5 (κινητικής+δυναμικής). Όταν όμως του προσδώσουμε κατακόρυφη γωνιακή ταχύτητα περί τον άξονα
6 συμμετρίας του που συνδέει το ΚΜ με το κέντρο της σφαίρας και με το ΚΜ στο κατώτερο σημείο και το
7 αφήσουμε στο δάπεδο το tippe top αντί να συνεχίσει να περιστρέφεται περί τον άξονα αυτόν σε αυτή τη
8 διάταξη που αντιστοιχεί στη χαμηλότερη δυναμική ενέργεια, αναποδογυρίζει, όπως φαίνεται στο Σχ.
9 1, και περιστρέφεται, αν είχε αρκετή αρχική στροφορμή, με την ίδια φορά περί τον άξονα συμμετρίας
10 του στη διάταξη μέγιστης δυναμικής ενέργειας! Το tippe top εφευρέθηκε το 1891 από τη Γερμανίδα νο-
11 σηλεύτρια Helene Sperrl, η οποία κατοχύρωσε και δικαιώματα ευρεσιτεχνίας, και η συμπεριφορά του
12 έχει προβληματίσει πολλούς όπως φαίνεται στο Σχ. 2 και έχει πλούσια βιβλιογραφία¹.

13 Επειδή η δυναμική ενέργεια αυξάνεται κατά την αναστροφή η γωνιακή ταχύτητα του tippe top
14 αναγκαστικά πρέπει να μειώνεται. Αυτό απαιτεί ότι ροπές από τριβές στο σημείο επαφής του tippe

¹βλ. Cohen, R. J., 1977: The tippe top revisited. *American Journal of Physics*, **45**, 12–17; Leutwyler, H., 1994: Why some tops tip?, *European J. Phys.*, **15**, 59-61; Ebenfeld, S., Scheck, F., 1995: A New Analysis of the Tippe Top: Asymptotic States and Liapunov Stability. *Annals of Physics*, **243**, 195-217; Moffatt, H. K., Shimomura, Y. & Branicki, M., 2004: Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface. I. Stability and the gyroscopic approximation. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **460**, 3643-32672; Bou-Rabee, N., Marsden, J. E. & Romero L. A., 2008: Dissipation-Induced Heteroclinic Orbits in Tippe Tops. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, **3**, 352-377.



Σχήμα 1: Το tippe top (αριστερά) όταν τοποθετηθεί σε ένα μη λείο τραπέζι με μεγάλη κατακόρυφη γωνιακή ταχύτητα και με την σφαιρική επιφάνεια προς τα κάτω με την πάροδο του χρόνου θα αναστραφεί όπως φαίνεται στο σχήμα.

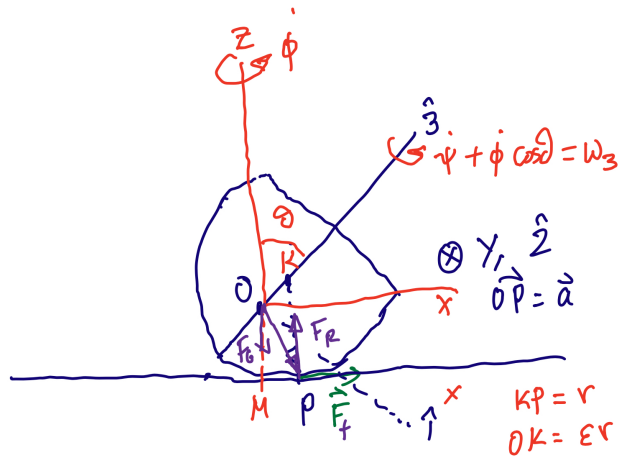


Σχήμα 2: Ο Wolfgang Pauli και ο Niels Bohr παίζοντας με το 'tippe top' στα εγκαίνια του Ινστιτούτου Φυσικής το 1954 στο Lund της Σουηδίας. Από το Niels Bohr Archive, photograph by Erik Gustafson, courtesy of AIP Emilio Segrè Visual Archives, Margrethe Bohr Collection.

15 top με το δάπεδο μειώνουν τη γωνιακή ταχύτητα και περιστροφική ενέργεια του tippe top. Επομένως
16 το φαινόμενο του αναποδογυρίσματος του tippe top έχει τη ρίζα του στην ύπαρξη τριβών. Αν το δάπεδο
17 ήταν απόλυτα λείο το tippe top δεν θα αναποδογύριζε. Οι κύρια δύναμη τριβής που ασκείται σε ένα
18 περιστρεφόμενο σώμα που είναι σε επαφή με μία σκληρή (μη ελαστική) επιφάνεια είναι συνήθως η
19 τριβή ολίσθησης (η τριβή κύλισης είναι συνήθως σχετικά αμελητέα). Επομένως η ανάλυση του tippe
20 top πρέπει να περιλαμβάνει τις δυναμικές επιπτώσεις στην κίνησή του από τις δυνάμεις τριβής. Η
21 κύρια επίπτωση είναι ότι λόγω των τριβών η συνολική ενέργεια του tippe top μειώνεται. Αλλά εφόσον
22 η κύρια πηγή τριβής είναι η τριβή ολίσθησης, το περισσότερο που θα μπορούσε να μειωθεί η ενέργεια
23 είναι μέχρις ότου σταματήσει να ολισθαίνει το tippe top, διότι όταν σταματήσει να ολισθαίνει το tippe
24 top η ενέργειά του, αμελώντας την μικρή ανάλωση από την τριβή κύλισης, διατηρείται. Συνεπώς αν
25 το tippe top σταματήσει να ολισθαίνει και αμελήσουμε τις τριβές κύλισης θα παραμείνει σε αυτή τη
26 δυναμική κατάσταση πάντοτε έχοντας μεταβεί σε ένα χαμηλότερο ενεργειακά επίπεδο, το οποίο όμως
27 πρέπει να είναι τουλάχιστον τοπικό ελάχιστο της ενέργειας, δεδομένου ότι η τελική κατάσταση είναι
28 ευσταθής (αν δεν ήταν δεν θα την παρατηρούσαμε).

29 Το tippe top αποδεικνύει ότι υπάρχουν καταστάσεις όπου η ενέργεια ελαχιστοποιείται όταν η δυ-
30 ναμική ενέργεια μεγιστοποιείται. Σε ένα μηχανικό σύστημα αυτό είναι δυνατόν μόνον αν υπάρχουν
31 ποσότητες που διατηρούνται καθώς η ενέργεια μειώνεται. Σε αυτά τα συστήματα η ελαχιστοποίηση
32 της ενέργειας γίνεται υπό περιορισμό και έτσι το σύστημα δεν καταλήγει αναγκαστικά σε κατάσταση
33 ελάχιστης δυναμικής ενέργειας. Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση του tippe top ελέγχεται από τη διατήρηση
34 κάποιας κρυφής ποσότητας, η οποία ονομάζεται αναλλοίωτο Jellett², η οποία παραμένει σταθερή πα-
35 ρότι η ενέργειά του μειώνεται. Η ύπαρξη αυτής της ποσότητας βασίζεται στη γεωμετρική ιδιότητα ότι
36 η επιφάνεια επαφής του στερεού με το δάπεδο είναι ακριβώς σφαιρική. Αν η επιφάνεια επαφής δεν
37 είναι ακριβώς σφαιρική τότε η Jellett διατηρείται προσεγγιστικά και ελέγχει την εξέλιξη του στερεού

²Ο Jellett ανακαλύπτει την ποσότητα αυτή (Jellett, J. H. 1872: A treatise on the theory of friction, London: Macmillan). Η αναλλοιότητα της ποσότητας του Jellett αποδεικνύεται όμως από τον Routh (βλ. σελ. 192-193 στο Routh, E. J.: The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid, bodies. Dover, New York, 1955).



Σχήμα 3: Η γεωμετρία για την ανάλυση της δυναμικής του tippe top.

38 όταν το σώμα περιστρέφεται τόσο γρήγορα ώστε να μεταπίπτει κατά προσέγγιση ως ελεύθερο σώμα.

Για την περιγραφή της κίνησης του tippe top λαμβάνουμε τρία συστήματα αναφοράς. Ένα αδρανειακό το $X'Y'Z'$, με τον άξονα Z' κατακόρυφο, και δύο μη αδρανειακά τα $O123$ και $OXYZ$ με κέντρο το KM του σώματος O (βλ. Σχ. 3). Το $O123$ έχει ως άξονες τους κύριους άξονες αδράνειας του σώματος. Θεωρούμε ότι το tippe top είναι αξισυμμετρικό με ροπές αδράνειας I_3 και I . Ο άξονας συμμετρίας έχει ροπή αδράνειας I_3 ενώ οι ροπές αδράνειας στους άξονες που είναι κάθετοι στον άξονα συμμετρίας είναι I . Ο άξονας $O3$, με μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{3}$, λαμβάνεται ως ο άξονας συμμετρίας του σώματος και ο άξονας $O1 \perp O3$, με μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{1}$, επί του επιπέδου που σχηματίζει το $O3$ με την κατακόρυφο. Τέλος ο άξονας $O2$, με μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{2} = \hat{3} \times \hat{1}$, συμπληρώνει την τριάδα. Το σύστημα αναφοράς $OXYZ$ λαμβάνεται ώστε ο OZ να είναι κατακόρυφος και το επίπεδο OXZ να ταυτίζεται με το επίπεδο $OZ3$, και έτσι ο άξονας OY ταυτίζεται ανά πάσα στιγμή με τον άξονα $O2$. Τα μοναδιαία διανύσματα του καρτεσιανού συστήματος $OXYZ$ είναι τα \hat{x} , \hat{y} και \hat{z} τα οποία, αν η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ του $O3$ και της OZ είναι $\theta = \angle ZO3$, σχετίζονται με τα μοναδιαία διανύσματα του $O123$ ως εξής:

$$\hat{x} = \cos\theta\hat{1} + \sin\theta\hat{3}, \quad \hat{y} = \hat{2}, \quad \hat{z} = -\sin\theta\hat{1} + \cos\theta\hat{3}.$$

Το σημείο επαφής του tippe top με το επίπεδο είναι το P και X_P το διάνυσμα \vec{OP} , το οποίο είναι (βλ. Σχ. 3):

$$X_P = \epsilon R\hat{3} - R\hat{z},$$

39 όπου R η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας του tippe top στο σημείο επαφής P και ϵR η απόσταση
 40 του KM , O , από το κέντρο καμπυλότητας K . Επειδή η επιφάνεια είναι σφαιρική το R αλλά και το ϵR
 41 είναι σταθερά. Το $0 \leq \epsilon \leq 1$ είναι ο λόγος της αποστασης το KM από το κέντρο της σφαίρας ως προς
 42 την ακτίνα της σφαίρας.

Η θέση των κυρίων αξόνων του σώματος προσδιορίζεται με τις γωνίες Euler (θ, ϕ, ψ) με βάση το αδρανειακό σύστημα $X'Y'Z'$. Τότε το σύστημα $OXYZ$ περιστρέφεται ως προς το αδρανειακό με γω-

νιακή ταχύτητα

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \hat{\mathbf{z}},$$

ενώ η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος O123 είναι

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\theta} \hat{\mathbf{2}} + \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} = -\Omega \sin \theta \hat{\mathbf{1}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{2}} + \Omega \cos \theta \hat{\mathbf{3}},$$

δεδομένου ότι ο άξονας O1 παραμένει πάντα στο επίπεδο ZO3 και δεν περιστρέφεται περί τον O3. Τέλος η γωνιακή ταχύτητα του σώματος είναι

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \hat{\mathbf{2}} + \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} + \dot{\psi} \hat{\mathbf{3}} = -\Omega \sin \theta \hat{\mathbf{1}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{2}} + \underbrace{(\dot{\psi} + \Omega \cos \theta)}_{\stackrel{\text{def}}{=} \omega_3} \hat{\mathbf{3}}.$$

- 43 Η γωνιακή ταχύτητα Ω είναι η γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης του άξονα συμμετρίας, και η γωνιακή
44 ταχύτητα ω_3 είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος περί τον άξονα συμμετρίας του.

Εάν \mathbf{R} είναι η θέση και $\mathbf{U} = \dot{\mathbf{R}}$ η ταχύτητα του ΚΜ ως προς το αδρανειακό σύστημα τότε η εξίσωση κίνησης του ΚΜ τους σώματος είναι

$$m \frac{d\mathbf{U}}{dt} = F_R \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{F} - mg \hat{\mathbf{z}}, \quad (1)$$

όπου $F_R > 0$ η κατακόρυφη αντίδραση από το δάπεδο, $\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}}$ η δύναμη της τριβής και $-mg \hat{\mathbf{z}}$ η δύναμη της βαρύτητας (m είναι η ολική μάζα του σώματος). Η δύναμη της τριβής \mathbf{F} αντιτίθεται στην κίνηση του σώματος όταν αυτό ολισθαίνει και επομένως είναι

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}_P \leq 0,$$

όπου $\mathbf{U}_P = \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X}_P$ η ταχύτητα του σώματος στο σημείο επαφής, P . Επιπλέον απαιτούμε το σώμα να βρίσκεται πάντα σε επαφή με το δάπεδο, δηλαδή να ικανοποιείται πάντοτε η ισότητα:

$$\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -\mathbf{X}_P \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad (2)$$

- 45 και συνεπώς παραγωγίζοντας χρονικά τη σχέση αυτή η κατακόρυφη ταχύτητα πρέπει πάντοτε να
46 μηδενίζεται: $W_P = \mathbf{U}_P \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$.

Η χρονική εξέλιξη της στροφορμής \mathbf{L} , ως προς το ΚΜ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{X}_P \times (F_R \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{F}), \quad (3)$$

- 47 Η στροφορμή είναι $L = \mathbb{I} \boldsymbol{\omega}$, όπου \mathbb{I} είναι ο τανυστής αδράνειας του σώματος.

Η ποσότητα Jellet η οποία διατηρείται κατά την κίνηση του *tippe top* είναι η

$$J = -\mathbf{X}_P \cdot \mathbf{L} = R(L_z - \epsilon L_3), \quad (4)$$

όπου $L_z = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{L}$ και $L_3 = \hat{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{L}$. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή και αντίθετα από τον στροβό του

Lagrange δεν διατηρούνται λόγω της τριβής ούτε η $L_z = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ ούτε και η $L_3 = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{3}}$. Διατηρείται όμως ο συνδυασμός των στροφορμών

$$(L_z - \epsilon L_3) .$$

48 Αποδείχτηκε πρόσφατα³ ότι ενώ το αναλλοίωτο Jellet δεν διατηρείται αν η επιφάνεια επαφής του στε-
 49 ρεού δεν είναι σφαιρική (δεν έχει δηλαδή την ίδια ακτίνα καμπυλότητας), το αναλλοίωτο Jellet επι-
 50 ζεί ως αδιαβατικό αναλλοίωτο (δηλαδή μεταβάλλεται πολύ πιο αργά από τη χρονική κλίμακα εξέλι-
 51 ξης του συστήματος) αν το σώμα περιστρέφεται με μεγάλη γωνιακή ταχύτητα έτσι ώστε να ισχύει
 52 $I_3\omega_3 \approx I\Omega \cos \theta$ και το σώμα να μεταπίπτει κατά προσέγγιση ως ελεύθερο σώμα.

53

Άσκηση: Δείξτε ότι η ποσότητα

$$J = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_p = R(L_z - \epsilon L_3)$$

54 διατηρείται. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται αναλλοίωτο του Jellett.

55 Λύση:

56 Παρατηρούμε πρώτα ότι η προβολή της ροπής των δυνάμεων ως προς το ΚΜ είναι μηδενική, διότι

$$\mathbf{X}_p \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{X}_p \cdot (\mathbf{X}_p \times \mathbf{F}) = 0, \quad (5)$$

όπου $\mathbf{F} = F_R \hat{\mathbf{z}} + F_X \hat{\mathbf{x}} + F_Y \hat{\mathbf{y}}$ η συνολική δύναμη που ασκείται στο σημείο επαφής και πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά την (3) με το \mathbf{X}_p , έχουμε αμέσως ότι

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \cdot \mathbf{X}_p = 0. \quad (6)$$

Αν η επιφάνεια επαφής ενός αξισυμμετρικού στερεού είναι σφαιρική τότε έχουμε επιπλέον τη σχέση:

$$\mathbf{L} \cdot \frac{d\mathbf{X}_p}{dt} = 0. \quad (7)$$

Για την απόδειξη⁴ της (7) παραγωγίζουμε την $\mathbf{X}_p = \epsilon R \hat{\mathbf{3}} - R \hat{\mathbf{z}}$ και έχουμε

$$\frac{d\mathbf{X}_p}{dt} = \frac{d(\epsilon R \hat{\mathbf{3}} - R \hat{\mathbf{z}})}{dt} = \epsilon R \dot{\hat{\mathbf{3}}} = \epsilon R \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{3}}, \quad (8)$$

διότι είναι $\dot{\hat{\mathbf{z}}} = 0$, $\dot{\hat{\mathbf{3}}} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{3}}$, και λόγω σφαιρικότητας της επιφάνειας επαφής το R και το ϵ είναι σταθερά, Όμως η στροφορμή μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} + (I_3 - I)\omega_3 \hat{\mathbf{3}},$$

και η (8) παίρνει τη μορφή

$$\frac{d\mathbf{X}_p}{dt} = \frac{\epsilon R}{I} \mathbf{L} \times \hat{\mathbf{3}},$$

57 που συνεπάγεται ότι η $d\mathbf{X}_p/dt$ είναι κάθετος στην \mathbf{L} και επομένως ισχύει η (7). Η καθετότητα της \mathbf{L} με την $d\mathbf{X}_p/dt$ δεν ισχύει αν
 58 η επιφάνεια επαφής με το επίπεδο δεν είναι σφαιρική.

59 Οι (6) και (7) συνεπάγονται τη διατήρηση της ποσότητας $-\mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_p = R(L_z - \epsilon L_3)$.

60

³Moffatt, H. K., Shimomura, Y. & Branicki, M: Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface. I. Stability and the gyroscopic approximation, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 2004, **460**, 3643-3672, doi: 10.1098/rspa.2004.1329.

⁴Προσέξτε ότι $d\mathbf{X}_p/dt \neq \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X}_p$, διότι το σημείο επαφής δεν είναι το ίδιο σημείο στο στερεό. Αν ίσχυε αυτή η σχέση τότε το μήκος του \mathbf{X}_p θα ήταν σταθερό κάτι που δεν συμβαίνει γενικά. Στον υπολογισμό του \mathbf{X}_p πρέπει να ληφθεί και η αλλαγή του μήκους του που επιτυγχάνεται με το να γραφεί αναλυτικά το διάνυσμα \mathbf{X}_p και έπειτα να παραγωγισθεί.

Ορίζουμε την ποσότητα

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{U}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} + mg\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{z}}, \quad (9)$$

όπου \mathbf{R} η θέση του ΚΜ ως προς τον αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Επειδή (βλ. Άσκηση) είναι

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}_P \leq 0.$$

61 η ολική ενέργεια του στερεού μειώνεται όταν η δύναμη που ασκείται (π.χ. τριβή) είναι αντίθετη στην
62 ταχύτητα του σώματος στο σημείο επαφής.

63 Καθώς δρουν οι τριβές και η ενέργεια μειώνεται το *tippe top* καταλήγει στο χαμηλότερο επίπεδο
64 ενέργειας που επιτρέπεται δεδομένου ότι συγχρόνως διατηρείται το αναλλοίωτο Jellet. Το ερώτημα
65 είναι ποιό είναι αυτό.

66 Για να το απαντήσουμε, πρέπει να προσδιορίσουμε τα στάσιμα σημεία της E υπό τον περιορισμό
67 ότι το J είναι σταθερό. Αυτό επιτυγχάνεται προσδιορίζοντας τα ακρότατα της συνάρτησης με πολλα-
68 πλασιαστή Lagrange, λ :

$$\begin{aligned} F(\mathbf{U}, \dot{\theta}, \Omega, \dot{\psi}, \theta, \lambda) &= E(\mathbf{U}, \dot{\theta}, \Omega, \dot{\psi}, \theta) + \lambda(L_z - \epsilon L_3) \\ &= \frac{m}{2}\mathbf{U}^2 + \frac{I}{2}(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \Omega \cos \theta)^2 + mgR(1 - \epsilon \cos \theta) \\ &\quad + \lambda(I\Omega \sin^2 \theta + I_3(\dot{\psi} + \Omega \cos \theta)(\cos \theta - \epsilon) - J). \end{aligned} \quad (10)$$

69 ως προς τις μεταβλητές $\mathbf{U}, \dot{\theta}, \Omega, \dot{\psi}, \theta$ και λ . Καταλήξαμε στη μορφή αυτή διότι η στροφορμή ως προς το
70 ΚΜ είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= -I\Omega \sin \theta \hat{\mathbf{i}} + I\dot{\theta} \hat{\mathbf{z}} + I_3\omega_3 \hat{\mathbf{z}} \\ &= -I\Omega \sin \theta (\cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}) + I\dot{\theta} \hat{\mathbf{y}} + I_3\omega_3 (\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}) \\ &= (I_3\omega_3 \sin \theta - I\Omega \sin \theta \cos \theta) \hat{\mathbf{x}} + I\dot{\theta} \hat{\mathbf{y}} + (I\Omega \sin^2 \theta + I_3\omega_3 \cos \theta) \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

και επομένως οι στροφορμές που υπεισέρχονται στο αναλλοίωτου του Jellet είναι

$$L_z = (I\Omega \sin^2 \theta + I_3\omega_3 \cos \theta), \quad L_3 = I_3\omega_3.$$

Επειδή δεν υπεισέρχονται οι μεταβλητές $\mathbf{U}, \dot{\theta}$ στο αναλλοίωτο Jellet η στασιμοποίηση της ενέργειας ως προς αυτές τις μεταβλητές δεν υπόκειται σε περιορισμούς και επομένως όταν η ενέργεια είναι ακρότατη το ΚΜ είναι ακίνητο, $\mathbf{U} = 0$ και η κλίση του, θ , σταθερή ($\dot{\theta} = 0$). Στασιμοποίηση ως προς Ω και $\dot{\psi}$ (βλ. Άσκηση) μετά από πράξεις οδηγεί στη συνθήκη $\theta = 0, \pi$ ή

$$\dot{\psi} + \epsilon\Omega = 0,$$

που σημαίνει ότι η ταχύτητα στο σημείο επαφής στην κατάσταση στασιμοποίησης είναι μηδενική, διότι

η ταχύτητα στο σημείο επαφής με $\mathbf{U} = 0$ και $\dot{\theta} = 0$ είναι:

$$\mathbf{U}_p = \mathcal{J} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X}_p = (\Omega \hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta} \hat{\mathbf{2}} + \dot{\psi} \hat{\mathbf{3}}) \times (\epsilon R \hat{\mathbf{3}} - R \hat{\mathbf{z}}) = R \sin \theta (\dot{\psi} + \epsilon \Omega) \hat{\mathbf{2}} = 0.$$

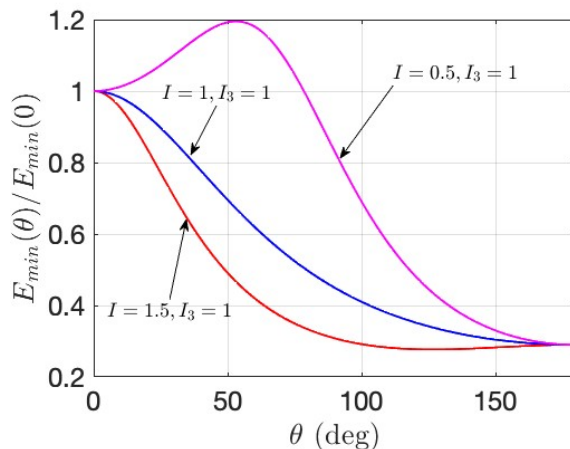
Αυτό σημαίνει ότι έχει σταματήσει η ολίσθηση και εφεξής η ενέργεια του στερεού διατηρείται. Στην κατάσταση αυτή

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega(\hat{\mathbf{z}} - \epsilon \hat{\mathbf{3}}) = -\frac{\Omega}{R} \mathbf{X}_p,$$

71 και το σώμα περιστρέφεται περί το άξονα που συνδέει το ΚΜ με το σημείο επαφής. Εισάγοντας τις
72 στάσιμες τιμές η στάσιμη ενέργεια ως προς όλες τις μεταβλητές, πλην της γωνίας θ , (βλ. Άσκηση)
73 είναι:

$$E_{min}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{J^2}{I \sin^2 \theta + I_3 (\epsilon - \cos \theta)^2}. \quad (11)$$

74 Το σύστημα θα καταλήξει στη γωνία θ που αντιστοιχεί στο ελάχιστο της $E_{min}(\theta)$ που προσδιορίζεται
75 αμέσως από την (11) αν δωθούν οι παράμετρος J , I , I_3 , m , g και R . Σε κάθε περίπτωση το σώμα θα
76 καταλήξει σε κατάσταση σταθερής ενέργειας με το κέντρο μάζας ακίνητο, κλίση θ σταθερή και ταχύ-
77 τητα στο σημείο επαφής μηδενική, που σημαίνει ότι ή θα περιστρέφεται περί το σημείο επαφής με τον
78 άξονα συμμετρίας κατακόρυφο ($\theta = 0$ ή π) ή αν $0 < \theta < \pi$ το *tippe top* θα κυλιέται με το ΚΜ ακίνητο
79 και το σημείο επαφής θα διαγράφει κυκλική τροχιά.



Σχήμα 4: Η ελάχιστη ενέργεια ενός *tippe top* συναρτήσει της κλίσης θ για $\epsilon = 0.3$ και $I_3 = 1$. Το *tippe top* θα καταλήξει, όπως αναλώνεται η ενέργειά του από την τριβή, στο χαμηλότερο ενεργειακό επίπεδο. Αν $I_3(1 - \epsilon) < I < I_3(1 + \epsilon)$, όπως στη μπλέ καμπύλη, η ελάχιστη ενεργεια επιτυγχάνεται όταν $\theta = \pi$ και το *tippe top* είναι ανεστραμμένο. Αν $I > I_3(1 - \epsilon)$ όπως στην κόκκινη καμπύλη το ελάχιστο της ενέργειας επιτυγχάνεται σε μία ενδιάμεση γωνία $\pi/2 < \theta_m < \pi$ και το *tippe top* κυλιέται με αυτή την κλίση με το ΚΜ ακίνητο και το σημείο επαφής διαγράφοντας κύκλο. Τέλος αν $I < I_3(1 + \epsilon)$, μώβ καμπύλη, το ακρότατο $0 < \theta_m < \pi/2$ είναι μέγιστο και εμφανίζονται δύο ελάχιστα, στο $\theta = 0$ και $\theta = \pi$, και το *tippe top* θα καταλήξει σε ορθή ή ανεστραμμένη κατακόρυφη θέση ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες. Στην ανάλυση αυτή θεωρείται η δυναμική ενέργεια αμελητέα.

Αν το σώμα περιστρέφεται με μεγάλη γωνιακή ταχύτητα ώστε η δυναμική του ενέργεια να είναι σχετικά αμελητέα μπορούμε εύκολα να χαρακτηρίσουμε τα ελάχιστα της (11). Πρώτον παρατηρούμε ότι στην ανάστροφη κατάσταση ($\theta = \pi$) το *tippe top* έχει χαμηλότερη ενέργεια από την αρχική του

κατάσταση $\theta = 0$:

$$E_{min}(0) = \frac{J^2}{2I_3(\epsilon - 1)^2} \geq \frac{J^2}{2I_3(\epsilon + 1)^2} = E_{min}(\pi).$$

Η $E_{min}(\theta)$ είναι ακρότατη όταν

$$\frac{dE_{min}(\theta)}{d\theta} = -J^2 \sin \theta \frac{I \cos \theta + I_3(\epsilon - \cos \theta)}{(I \sin^2 \theta + I_3(\epsilon - \cos \theta)^2)^2} = 0,$$

δηλαδή όταν είναι $\theta = 0, \pi$ και στη ενδιάμεση γωνία

$$\cos \theta_m = \frac{\epsilon I_3}{I_3 - I}. \quad (12)$$

αν

$$\left| \frac{\epsilon I_3}{I_3 - I} \right| < 1,$$

δηλαδή όταν $I < I_3(1 - \epsilon)$ ή $I > I_3(1 + \epsilon)$ (υποθέτουμε $\epsilon < 1$). Αν $I_3(1 - \epsilon) < I < I_3(1 + \epsilon)$, όπως
στη μπλέ καμπύλη του Σχ. 4, η ελάχιστη ενεργεια επιτυγχάνεται όταν $\theta = \pi$ και το tippe top είναι
ανεστραμμένο. Αν $I > I_3(1 + \epsilon)$ όπως στην κόκκινη καμπύλη το ελάχιστο της ενέργειας επιτυγχάνεται
σε μία ενδιάμεση γωνία $\pi/2 < \theta_m < \pi$ και το tippe top κυλίεται με αυτή την κλίση με το ΚΜ ακίνητο
και το σημείο επαφής διαγράφοντας κύκλο. Τέλος αν $I < I_3(1 + \epsilon)$, μώβ καμπύλη, το ακρότατο $0 < \theta_m < \pi/2$
είναι μέγιστο και εμφανίζονται δύο ελάχιστα, στο $\theta = 0$ και $\theta = \pi$, και το tippe top θα
καταλήξει σε ορθή ή ανεστραμμένη κατακόρυφη θέση ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες.

Άσκηση: Δείξτε ότι

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}_p \leq 0.$$

Λύση:

Εξετάζουμε πρώτα τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του ΚΜ και της δυναμικής ενέργειας

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{U}^2 + mg \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{z}} \right) = \mathbf{U} \cdot (F_R \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{F} - mg \hat{\mathbf{z}}) + mg \mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{U} \cdot (F_R \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{F}).$$

Εξετάζουμε τώρα τον ρυθμό μεταβολής της περιστροφικής ενέργειας

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \right) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}},$$

διότι λόγω της συμμετρικότητας του \mathbb{I} και της χρονοανεξαρτησίας του \mathbb{I} στο σύστημα $O123$ έχουμε

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbb{I} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{L}}.$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \right) &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{X}_p \times (F_R \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{F})) \\ &= (F_R \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{F}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{X}_p) \\ &= (F_R \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{U}_p - \mathbf{U}), \end{aligned} \quad (13)$$

και προσθέτοντας τις (13) και (13) έχουμε δεδομένου ότι $\mathbf{U}_P \cdot \dot{\mathbf{z}} = W_P = 0$ ότι

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}_P .$$

93 Επομένως για να έχουμε ανάλωση ενέργειας απαιτείται η δύναμη της τριβής να αντιτίθεται στην ταχύτητα και να είναι $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}_P \leq$
 94 0. Στην ανάλυση δεν έχει συμπεριληφθεί τριβή κύλισης, η οποία θα εμφανιζόταν ως αναχαιτιστική ροπή στην περιστροφική
 95 εξίσωση του στερεού.

96

97 Άσκηση: Δείξτε ότι η εξάρτηση της στάσιμης ενέργειας του *tippe top* από τη γωνία θ , όταν διατηρείται το αναλλοίωτο Jellet,
 98 δίνεται από την (11).

99 Λύση:

100

101 Θέλουμε να προσδιορίσουμε το ελάχιστο της (10)

$$F(\mathbf{U}, \theta, \Omega, \psi, \theta, \lambda) = \frac{m}{2} \mathbf{U}^2 + \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \Omega \cos \theta)^2 + mgR(1 - \epsilon \cos \theta) \\ + \lambda (I\Omega \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \Omega \cos \theta) (\cos \theta - \epsilon) - J) .$$

102 Δεδομένου ότι το αναλλοίωτο Jellet δεν περιλαμβάνει τις μεταβλητές \mathbf{U} και $\dot{\theta}$ η συνθήκη στασιμοποίησης $\partial F / \partial \mathbf{U} = 0$ και
 103 $\partial F / \partial \dot{\theta} = 0$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ενέργεια στασιμοποιείται όταν το ΚΜ του στερεού είναι ακίνητο, $\mathbf{U} = 0$, και η γωνία θ
 104 σταθερή, $\dot{\theta} = 0$.

105 Η συνθήκη στασιμότητας ως προς Ω και ψ :

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} = L_z + \lambda (I \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\cos \theta - \epsilon)) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{\psi}} = I_3 + \lambda I_3 (\cos \theta - \epsilon) = 0$$

συνεπάγεται την

$$\frac{L_z}{I_3} = \frac{I \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\cos \theta - \epsilon)}{I_3 (\cos \theta - \epsilon)} ,$$

ή

$$\frac{I\Omega \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \Omega \cos \theta) \cos \theta}{I_3 (\dot{\psi} + \Omega \cos \theta)} = \frac{I \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\cos \theta - \epsilon)}{I_3 (\cos \theta - \epsilon)} ,$$

που οδηγεί ότι στην κατάσταση στασιμότητας της ενέργειας ή $\dot{\theta} = 0$, π ή οι γωνιακές ταχύτητες $\dot{\psi}$ και Ω συνδέονται με τη σχέση:

$$\dot{\psi} + \epsilon \Omega = 0 ,$$

που σημαίνει ότι το σημείο επαφής είναι ακίνητο και έχει σταματήσει η ολίσθηση. Εισάγοντας αυτές οι τιμές το αναλλοίωτο Jellet παίρνει τη μορφή:

$$J = -\frac{\dot{\psi}}{\epsilon} \left(I \sin^2 \theta + I_3 (\epsilon - \cos \theta)^2 \right) ,$$

106 και η στασιμοποιημένη ενέργεια ως προς τις μεταβλητές \mathbf{U} , $\dot{\theta}$, Ω , $\dot{\psi}$ και λ έχει την εξής εξάρτηση από τη θ :

$$E_{min}(\theta) = \frac{I}{2} \Omega^2 \sin^2 \theta + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \Omega \cos \theta)^2 + mgR(1 - \epsilon \cos \theta) \\ = \frac{\dot{\psi}^2}{2\epsilon^2} \left(I \sin^2 \theta + I_3 (\epsilon - \cos \theta)^2 \right) + mgR(1 - \epsilon \cos \theta) \\ = \frac{J^2}{2 (I \sin^2 \theta + I_3 (\epsilon - \cos \theta)^2)} + mgR(1 - \epsilon \cos \theta) .$$

107