

Σύνολο μορίων 180. Φροντίστε να ασχοληθείτε με κάποια προβλήματα ολοκληρωμένα και όχι αποσπασματικά. Επίσης, φροντίστε να είναι εμφανείς οι υπολογισμοί σας

1. **(40 μόρια)** Σε περιβάλλοντα με πολύ υψηλό ιξώδες η κίνηση ενός σωματιδίου που του ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις σε ένα δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή διέπεται από την Αριστοτέλεια εξίσωση κίνησης

$$\gamma \dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t)$$

όπου $\gamma > 0$ ο συντελεστής του ιξώδους. Θεωρούμε την κίνηση σε μία διάσταση.

(α) Αφού εκφράσετε τη συνάρτηση $\delta(t)$ στην ορθοκανονική βάση $e^{i\omega t}/\sqrt{2\pi}$ προσδιορίστε την ύστερη συνάρτηση Green $G_R(t)$ της κίνησης του σωματιδίου με τις μεθόδους Fourier.

(β) Προσδιορίστε μέσω της $G_R(t)$ τη θέση του σωματιδίου $x(t)$ όταν του έχει ασκηθεί δύναμη $F(t)$.

(γ) Θεωρήστε τώρα μία συλλογή σωματιδίων που αρχικά βρίσκεται στο ίδιο σημείο του χώρου. Στα σωματίδια ασκούνται τυχαίες δυνάμεις των οποίων οι μέσες τιμές των τιμών των δυνάμεων που ασκούνται στα μέλη της συλλογής και συμβολίζονται με $\langle \cdot \rangle$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\langle F(t) \rangle = 0, \quad \langle F(t)F(t') \rangle = 2\gamma kT\delta(t-t'),$$

όπου T είναι η θερμοκρασία του ρευστού στο οποίο υποθέτουμε ότι βρίσκονται τα σωματίδια και k η σταθερά του Boltzmann. Προσδιορίστε τη διασπορά της συλλογής $\langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \rangle$ στο όριο $t \rightarrow \infty$.

2. **(20 μόρια)** Δύο φορτισμένα σωματίδια μάζας m αλλά αντίθετου φορτίου, q και $-q$, κινούνται σε σταθερό ηλεκτρικό πεδίο έντασης $E\hat{z}$. Η δύναμη Coulomb μεταξύ των σωματιδίων μπορεί να ληφθεί ότι προέρχεται από το δυναμικό $-kq^2/r$ όπου r η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων.

(α) Δείξτε ότι το εξωτερικό πεδίο δεν επηρεάζει τη κίνηση του ΚΜ του συστήματος και γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων στο σύστημα ΚΜ.

(β) Τα σωματίδια παρατηρούνται να εκτελούν κυκλικές τροχιές με συχνότητα ω σε παράλληλα επίπεδα κάθετα στο $E\hat{z}$. Προσδιορίστε πλήρως τη γεωμετρία των τροχιών που διαγράφουν τα σωματίδια.

3. **(40 μόρια)**

(α) Θεωρήστε δύο σωματίδια που αλληλεπιδρούν βαρυτικά. Δείξτε ότι η ροπή αδράνειας $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$ των σωματιδίων, όπου $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2$ τα διανύσματα θέσης των σωματιδίων και $r_i^2 = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i$, ικανοποιεί τη σχέση των Poincaré - Eddington

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + V,$$

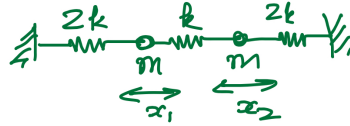
όπου T η κινητική ενέργεια των σωματιδίων και V η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σωματιδίων.

(β) Θεωρήστε τώρα ότι ένας μεγάλος αριθμός βαρυτικά αλληλεπιδρώντων σωματιδίων μάζας m σχηματίζει ένα κατά προσέγγιση ομογενές νέφος ακτίνας R συνολικής μάζας M . Υπολογίστε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του νέφους.

(γ) Υποθέτοντας ότι τα σωματίδια δεν συγκρούονται δείξτε (με γενίκευση του ερωτήματος (α)) ότι εφόσον το νέφος διατηρεί την ομογένειά του και τις διαστάσεις του, πρέπει αναγκαστικά τα σωματίδια να μην έχουν μηδενική μέση κινητική ενέργεια. Τι θα συνέβαινε τότε;

(δ) Εάν η μέση κινητική ενέργεια κάθε σωματιδίου του νέφους είναι

$$\langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle = \frac{3}{2} k T_a,$$



Σχήμα 1

όπου k η σταθερά του Boltzmann και T_a η μέση θερμοκρασία του νέφους, υπολογίστε τη θερμοχωρητικότητα του νέφους dE/dT_a , όπου E η συνολική ενέργεια του νέφους. Τι συμπεραίνετε για την εξέλιξη της ακτίνας του νέφους, αν η συνολική ενέργεια του νέφους μειώνεται (λόγω ακτινοβολίας);

4. **(30 μόρια)** Δύο σωματίδια μάζας m εκτελούν ταλαντώσεις στον άξονα x στη διάταξη του Σχ. 1. Τα ελατήρια είναι γραμμικά.
- (α) Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος και τους πίνακες των μαζών και δυναμικής ενέργειας του συστήματος.
- (β) Γράψτε το πηλίκο Rayleigh του συστήματος και αποδείξτε ότι οι στάσιμες τιμές του πηλίκου προσδιορίζουν τα τετράγωνα των χαρακτηριστικών συχνότητων του συστήματος.
- (γ) Μέσω του πηλίκου Rayleigh, και χωρίς να καταφύγετε σε ιδιοανάλυση των πινάκων, προσδιορίστε τις χαρακτηριστικές συχνότητες ταλαντώσεων του συστήματος.
- (δ) Έχοντας προσδιορίσει τις χαρακτηριστικές συχνότητες προσδιορίστε τώρα τους αντίστοιχους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης.
5. **(50 μόρια)** Βαθμωτό κυματικό πεδίο $\psi(\mathbf{x}, t)$ εξελίσσεται στον τρισδιάστατο χώρο σύμφωνα με την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi = 0,$$

με συνοριακές συνθήκες $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \psi(\mathbf{x}, t) = 0$.

- (α) Δείξτε ότι οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν από στασιμοποίηση της δράσης:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} \int_S d^3 \mathbf{x} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \psi)^2 \right),$$

ως προς μεταβολές που μηδενίζονται στο χωροχρονικό σύνορο του ολοκληρώματος της δράσης.

- (β) Δείξτε ότι οι χωρικές μεταθέσεις αποτελούν συμμετρία της Λαγκρανζιανής και εξ' αυτού προσδιορίστε τη διατηρούμενη ορμή του πεδίου.

Θεωρήστε τώρα ότι σφαιρικό σώμα μάζας m ακτίνας a του οποίου το κέντρο μάζας βρίσκεται στη θέση $\mathbf{q}$ αλληλεπιδρά με το βαθμωτό πεδίο και η αλληλεπίδραση μεταξύ πεδίου και σώματος περιγράφεται από τη Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{q}}^2 + \frac{1}{2} \int_{S'} d^3 \mathbf{x} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \psi)^2 \right),$$

όπου S' το χωρίο εκτός της σφαίρας. Το πεδίο εκτός από το ότι φθίνει στο άπειρο, ικανοποιεί και τη συνοριακή συνθήκη στην επιφάνεια της σφαίρας $\nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, όπου $\hat{\mathbf{n}}$ η κάθετος στην επιφάνεια της σφαίρας $\partial S'$.

- (γ) Προσδιορίστε (χωρίς να λύσετε) τις εξισώσεις κίνησης του σώματος λαμβάνοντας υπόψη ότι το χωρίο S' έχει ως σύνορο την επιφάνεια της σφαίρας η οποία συνδέεται με τη θέση $\mathbf{q}$. (Υποδ.: Για ευκολία, προσδιορίστε πρώτα τις εξισώσεις υποθέτοντας ότι ο χώρος είναι μίας χωρικής διάστασης και έπειτα γενικεύστε στις τρεις διαστάσεις).

- (δ) Η ολική Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη σε μεταθέσεις του ΚΜ του σωματιδίου: $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{b}$ όπου $\mathbf{b}$ σταθερό διάνυσμα. Εξ' αυτού προσδιορίστε τη διατηρούμενη ορμή του συστήματος μάζας, πεδίου.