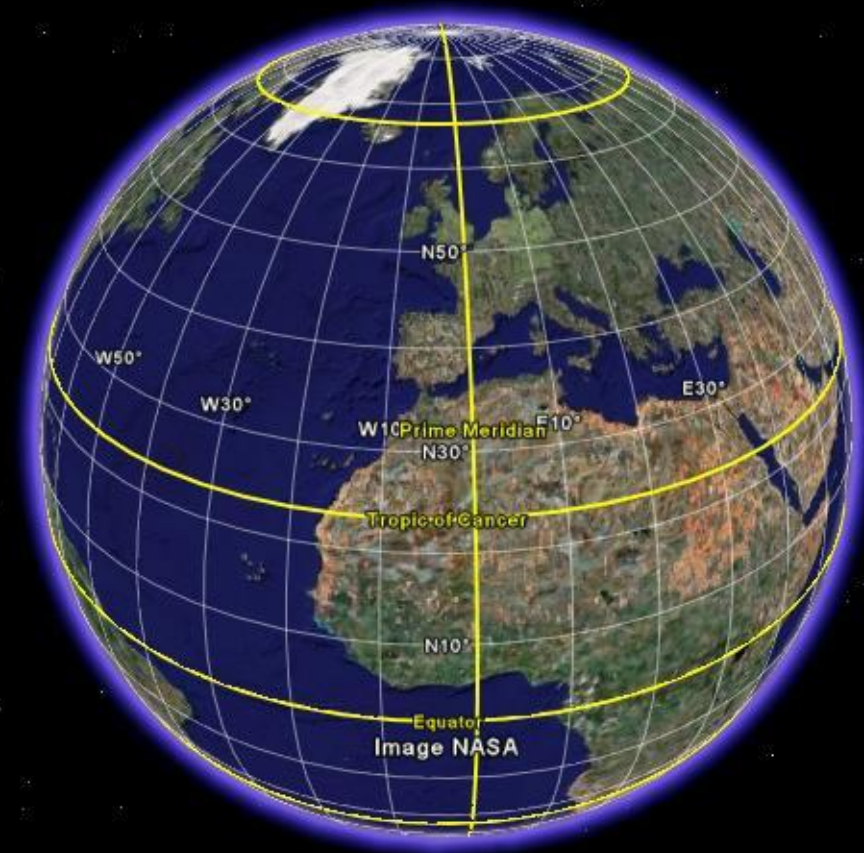




Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

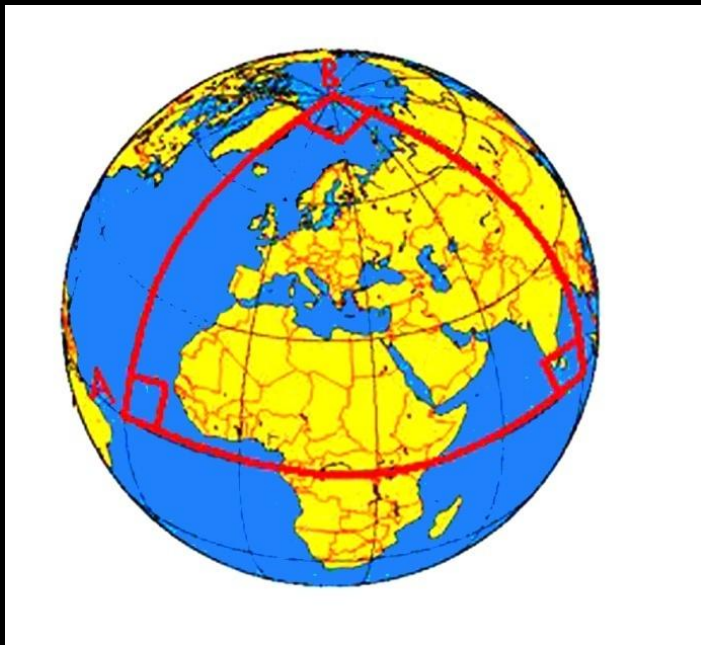
Κοσμάς Γαζέας

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ



Σφαιρικό Τρίγωνο

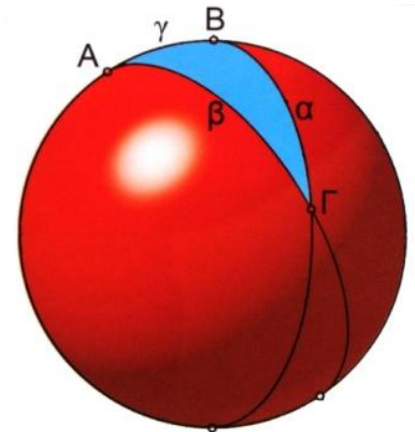
Σφαιρικό τρίγωνο λέγεται το μέρος της σφαίρας, το οποίο περικλείεται μεταξύ των τόξων τριών μέγιστων κύκλων, με την προϋπόθεση ότι τα τόξα είναι μικρότερα από ημικύκλια.



Σε ένα σφαιρικό τρίγωνο οι τρεις πλευρές του είναι τόξα μεγίστων κύκλων.

Παράδειγμα

Το σχήμα ΑΒΓ είναι ένα σφαιρικό τρίγωνο. Τα σημεία τομής των μέγιστων κύκλων Α, Β, Γ λέγονται *κορυφές* και τα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ λέγονται *πλευρές* του σφαιρικού τριγώνου. Οι γωνίες που σχηματίζουν οι τρεις μέγιστοι κύκλοι ανά δύο λέγονται *γωνίες* του σφαιρικού τριγώνου και τις συμβολίζουμε συνήθως με τα γράμματα των κορυφών Α, Β, Γ. Τις πλευρές του τριγώνου τις συμβολίζουμε συνήθως με τα μικρά γράμματα των απέναντι κορυφών, δηλαδή συμβολίζουμε με α, β, γ τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα.



Πρέπει να τονίσουμε ότι η γεωμετρία στη σφαίρα δεν επηρεάζεται από την ακτίνα της, διότι όλα τα μετρούμενα μεγέθη, μήκη πλευρών και γωνίες κορυφών, μετρώνται με τόξα μεγίστων κύκλων και όχι με μήκη.

Συστήματα σφαιρικών συντεταγμένων

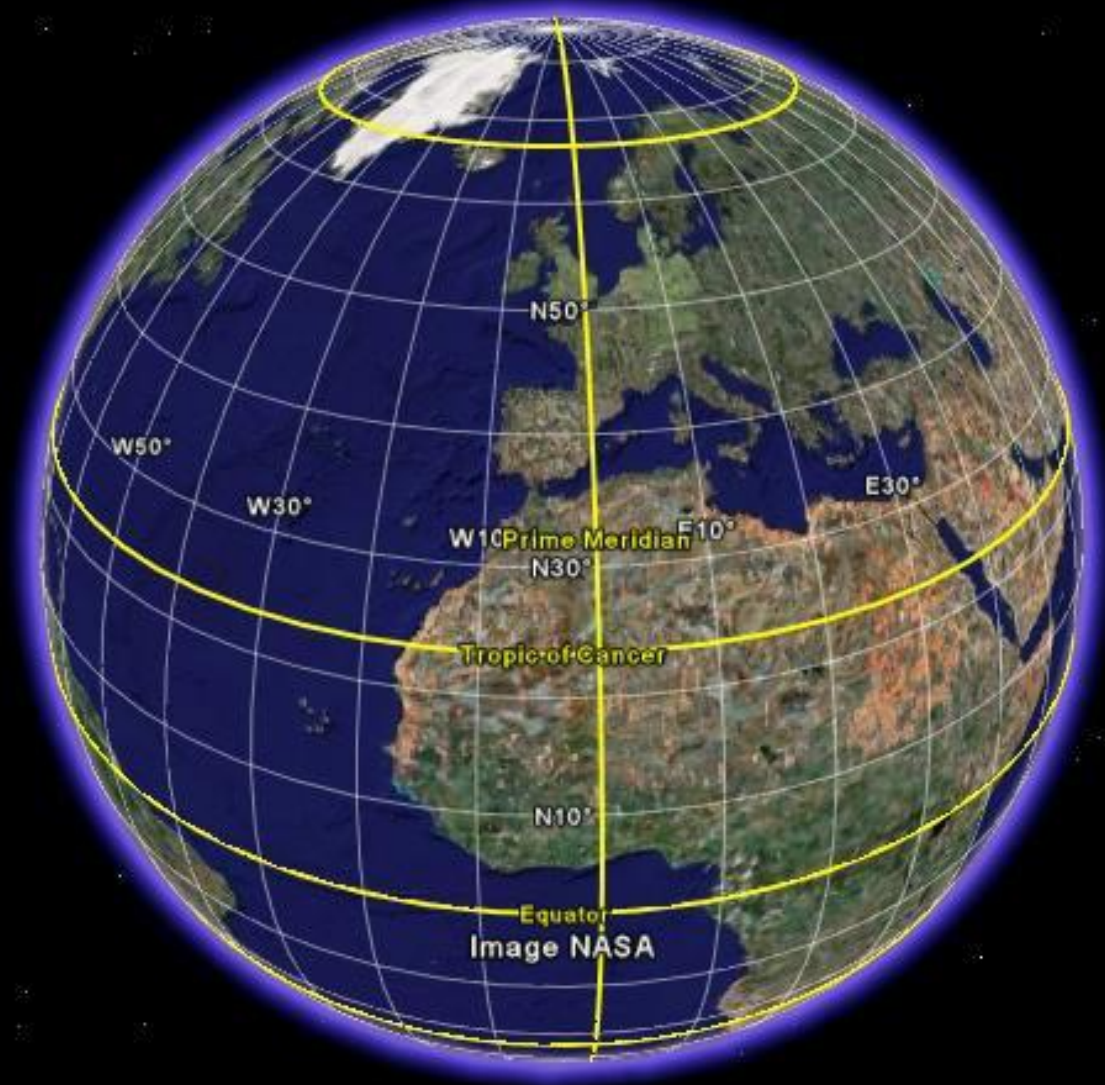
Για να ορίσουμε τη θέση ενός σημείου πάνω στην ουράνια σφαίρα χρησιμοποιούμε ένα **σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων**, όπου η ακτίνα της σφαίρας λαμβάνεται ίση με την μονάδα.

Η θέση ενός σημείου πάνω στη σφαίρα καθορίζεται με δύο συντεταγμένες, χρησιμοποιώντας σαν αναφορά **δύο τόξα μέγιστων κύκλων της σφαίρας, οι οποίοι τέμνονται κάθετα μεταξύ τους**.

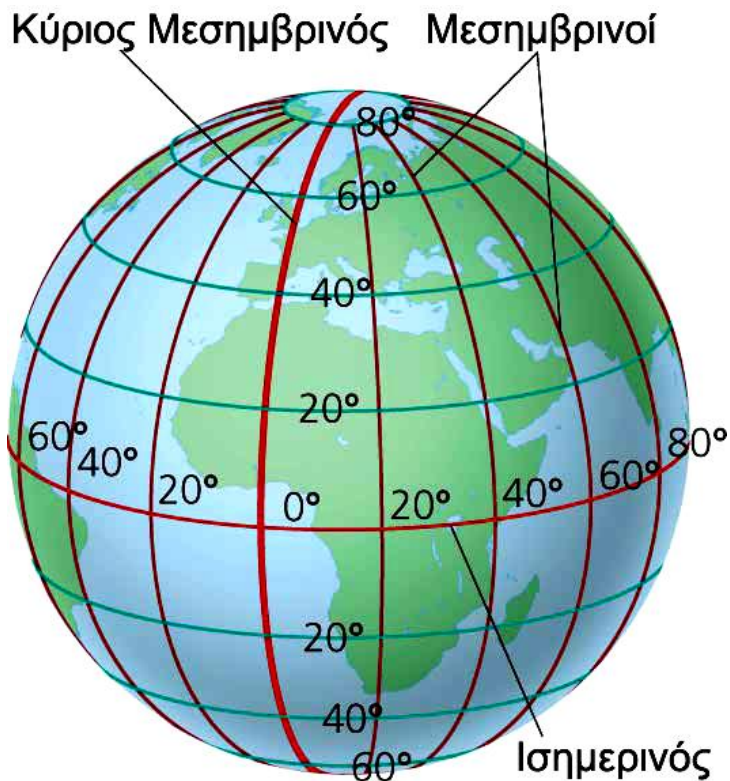
- 1) **Βασικός κύκλος** του συστήματος συντεταγμένων είναι ο μέγιστος κύκλος, στον οποίο γίνεται η μέτρηση της μιας συντεταγμένης.
- 2) **Πρώτος κάθετος** λέγεται ο μέγιστος κύκλος, που είναι κάθετος προς τον βασικό. Στον πρώτο κάθετο γίνεται η μέτρηση της άλλης συντεταγμένης.

* Το σημείο τομής των δύο παραπάνω μέγιστων κύκλων ορίζει και την αρχή των συντεταγμένων στο σύστημα αυτό.

Γεωγραφικές Συντεταγμένες



Γεωγραφικές Συντεταγμένες



Ουράνια Σφαίρα

Για να ορίσουμε ένα χρήσιμο σύστημα ουράνιων συνταταγμένων θεωρούμε μια υποθετική **ουράνια σφαίρα** που περιβάλλει τη Γη, με κοινό κέντρο.

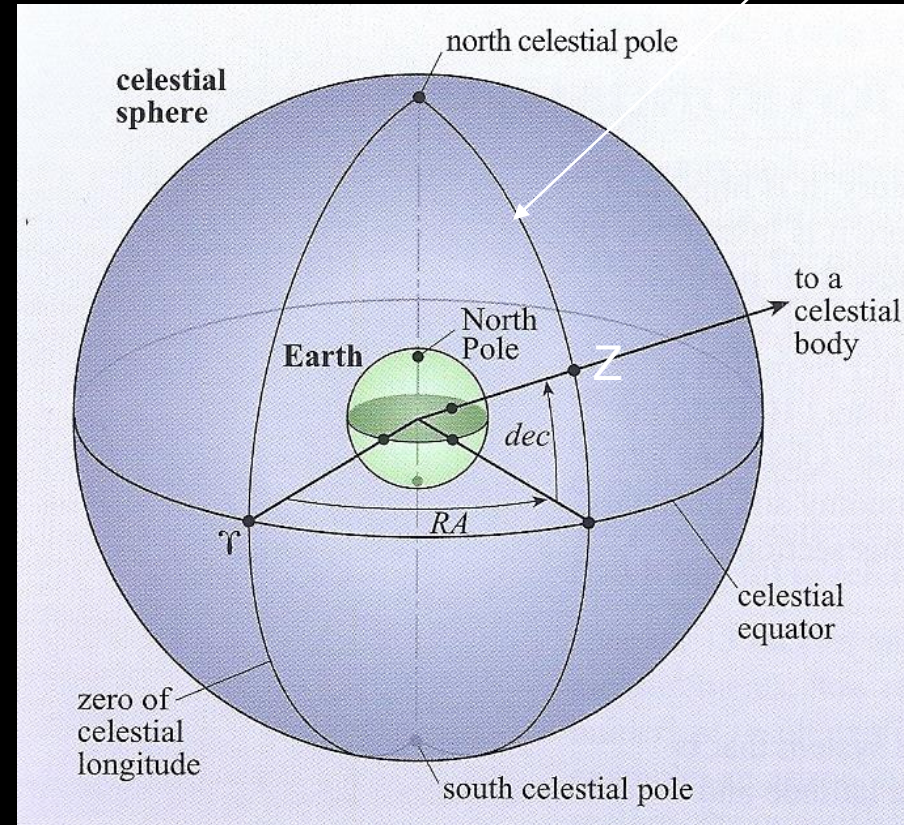
Επεκτείνοντας τον άξονα της Γης, ορίζουμε τα σημεία τομής του με την ουράνια σφαίρα ως τον **βόρειο (Π)** και **νότιο ουράνιο πόλο (Π')**.
ΠΠ': ο άξονας του κόσμου

Η προβολή του γήινου ισημερινού στην ουράνια σφαίρα ονομάζεται **ουράνιος ισημερινός** (ο μέγιστος κύκλος της ουράνιας σφαίρας που είναι κάθετος στον άξονα ΠΠ').

Η κατακόρυφος ενός τόπου τέμνει την ουράνια σφαίρα στο **Ζενίθ (Z)** και στο **Ναδίρ (N)**.

Η **φαινόμενη** περιστροφή της ουράνιας σφαίρας κατά τη φορά των δεικτών ρολογιού ονομάζεται **ανάδρομη φορά** (η αντίθετη φορά λέγεται **ορθή**).

ουράνιος μεσημβρινός του τόπου

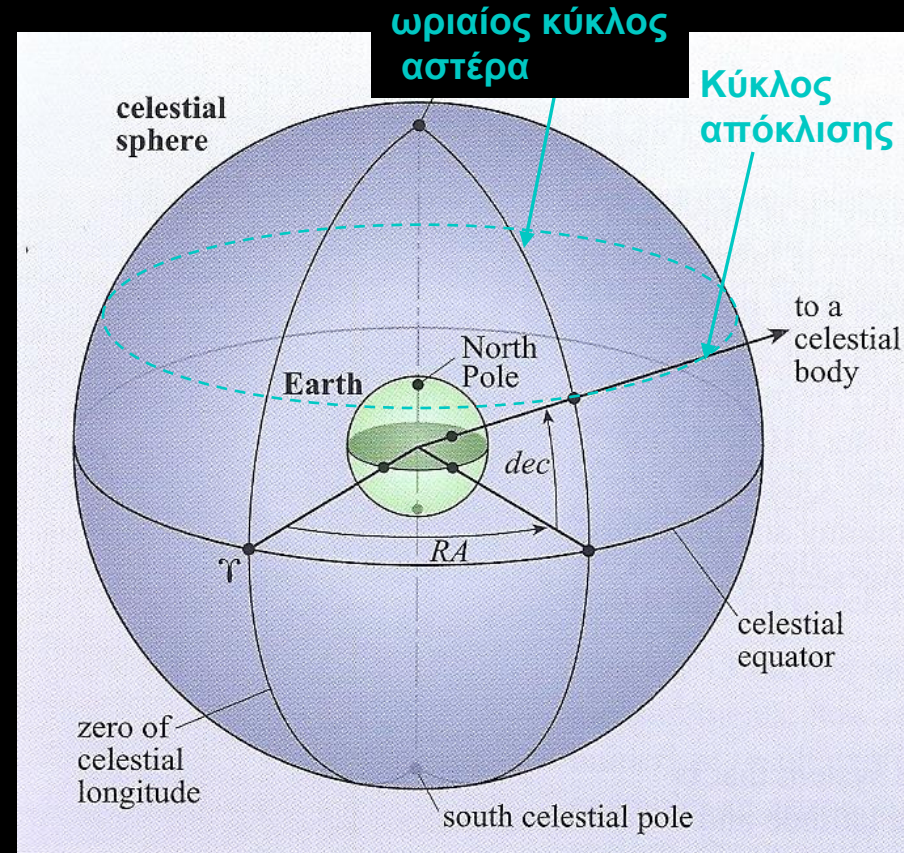


Ουράνια Σφαίρα

Κάθε (μέγιστο) ημικύκλιο που διέρχεται από τους πόλους ΠΠ΄ λέγεται **μεσημβρινός**

Ο μεσημβρινός ενός αστέρα λέγεται **ωριαίος του αστέρα** και είναι κάθετος στον Ισημερινό.

Κάθε μικρός κύκλος παράλληλος προς τον ισημερινό λέγεται **κύκλος απόκλισης**. Οι ημερήσιες τροχιές των άστρων είναι κύκλοι απόκλισης.



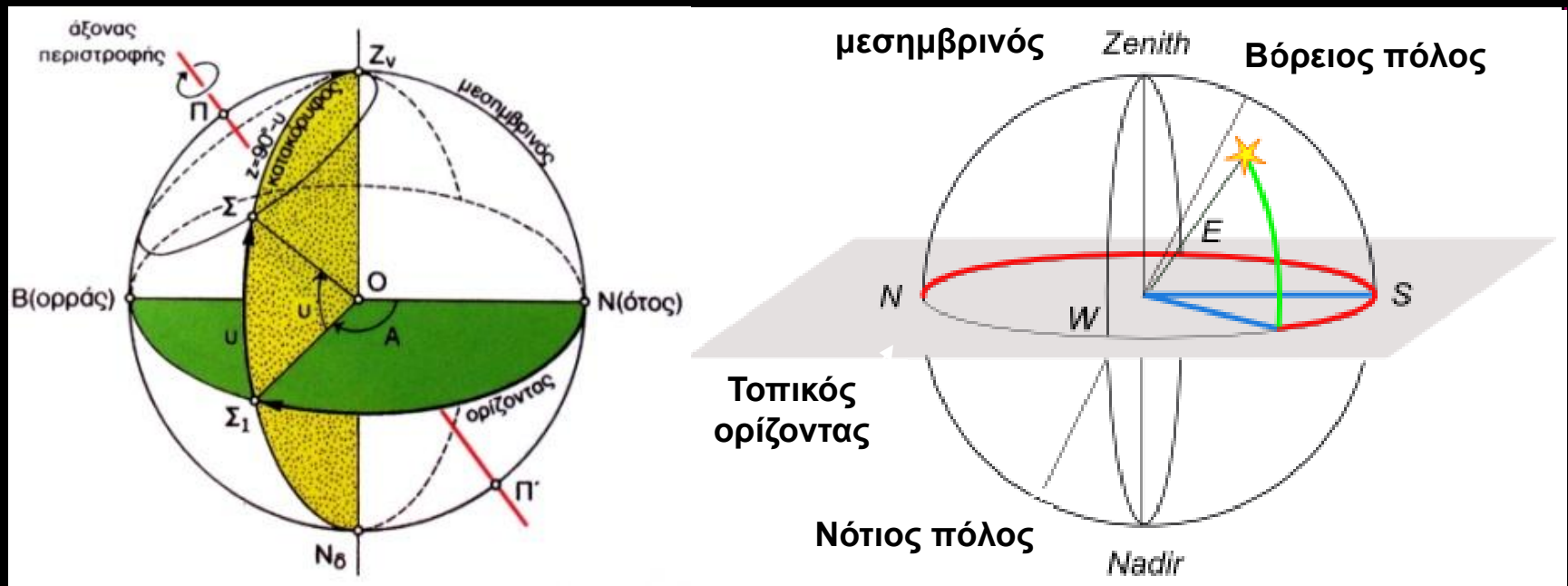
Οριζόντιες Συντεταγμένες

Βασικός κύκλος: ορίζοντας του τόπου
Πρώτος κάθετος: μεσημβρινός του τόπου

αζιμούθιο, A (azimuth, Az)
ύψος, u (altitude, Alt)

(δηλ. ο μέγιστος κύκλος που περνά από το ζενίθ του τόπου και τέμνει τον ορίζοντα στον Β και στον Ν)

Η **ζενίθια απόσταση** είναι η συμπληρωματική γωνία του ύψους. $zen+alt=90^\circ$

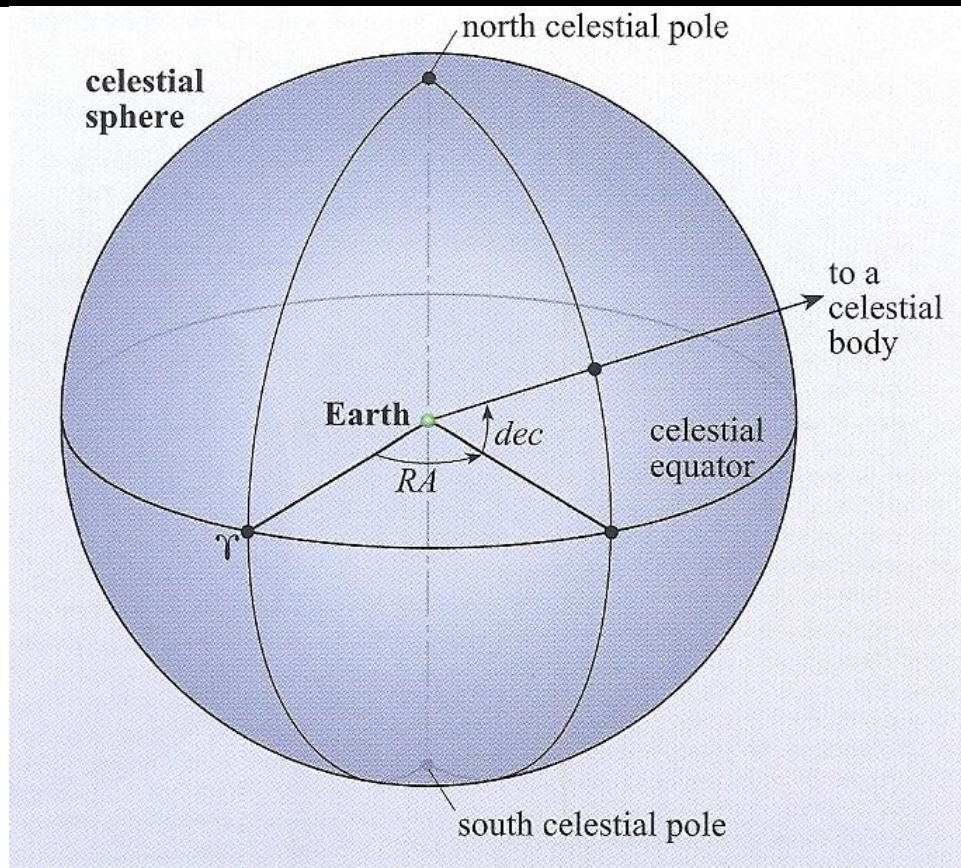
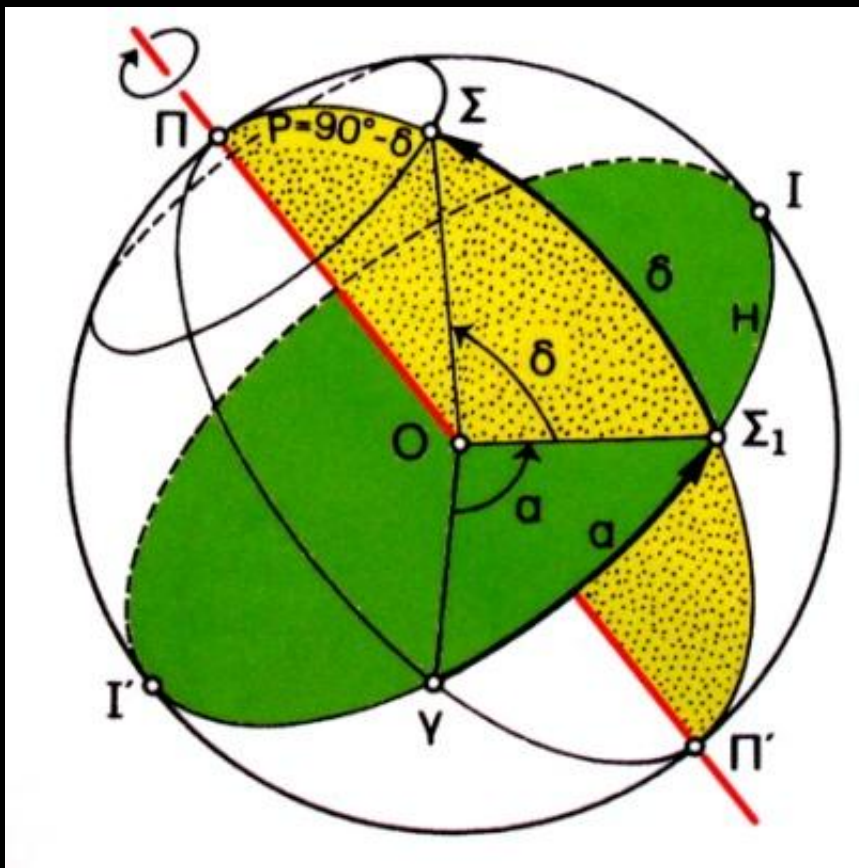


Οι συντεταγμένες αυτές αποτελούν τοπικό σύστημα γιατί εξαρτώνται από τον τοπικό μεσημβρινό.

Ουρανογραφικές Συντεταγμένες

Βασικός κύκλος: ουράνιος ισημερινός **ορθή αναφορά, α** (right ascension, RA)

Πρώτος κάθετος: ωριαίος κύκλος του σημείου γ **απόκλιση, δ** (declination, Dec)



γ : σημείο εαρινής ισημερίας

Οι συντεταγμένες αυτές αποτελούν τοπικό σύστημα γιατί εξαρτώνται από τον τοπικό μεσημβρινό.

Εκλειπτική

Η Γη κινείται γύρω από τον Ήλιο διαγράφοντας σε ένα έτος μία έλλειψη.

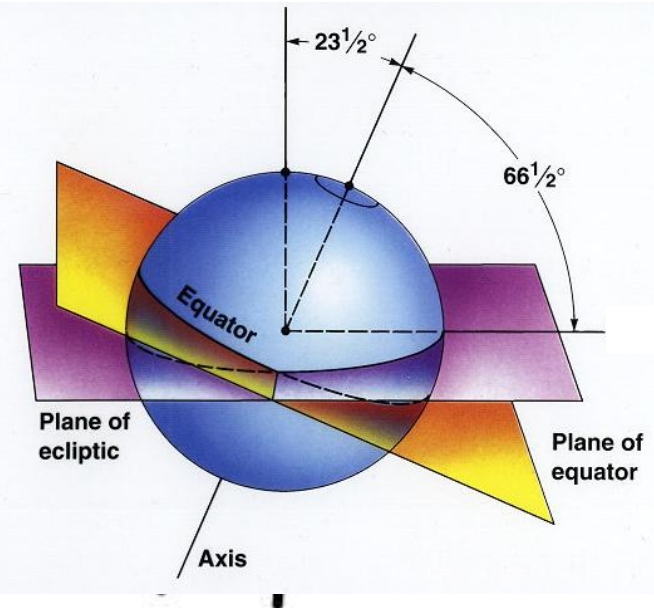
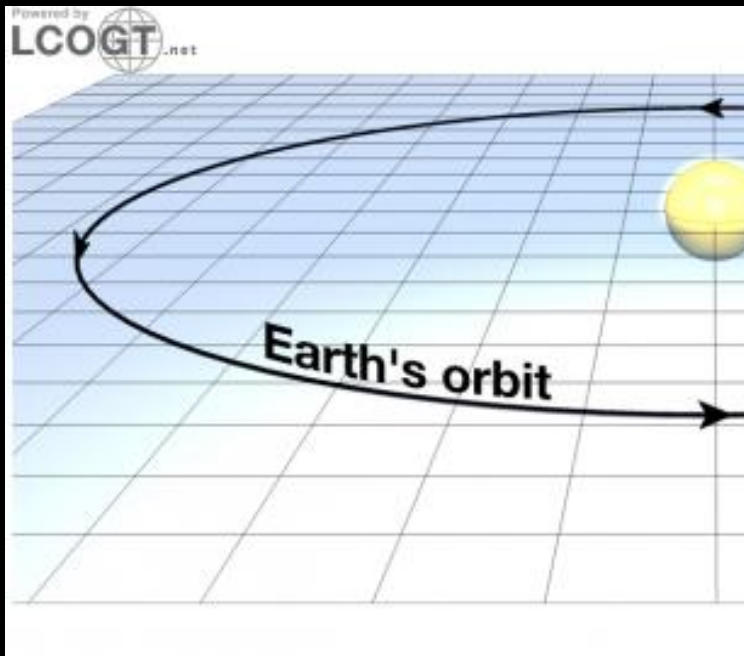
Αποτέλεσμα της κίνησης αυτής είναι η φαινόμενη κίνηση του Ήλιου επάνω στην ουράνια σφαίρα.

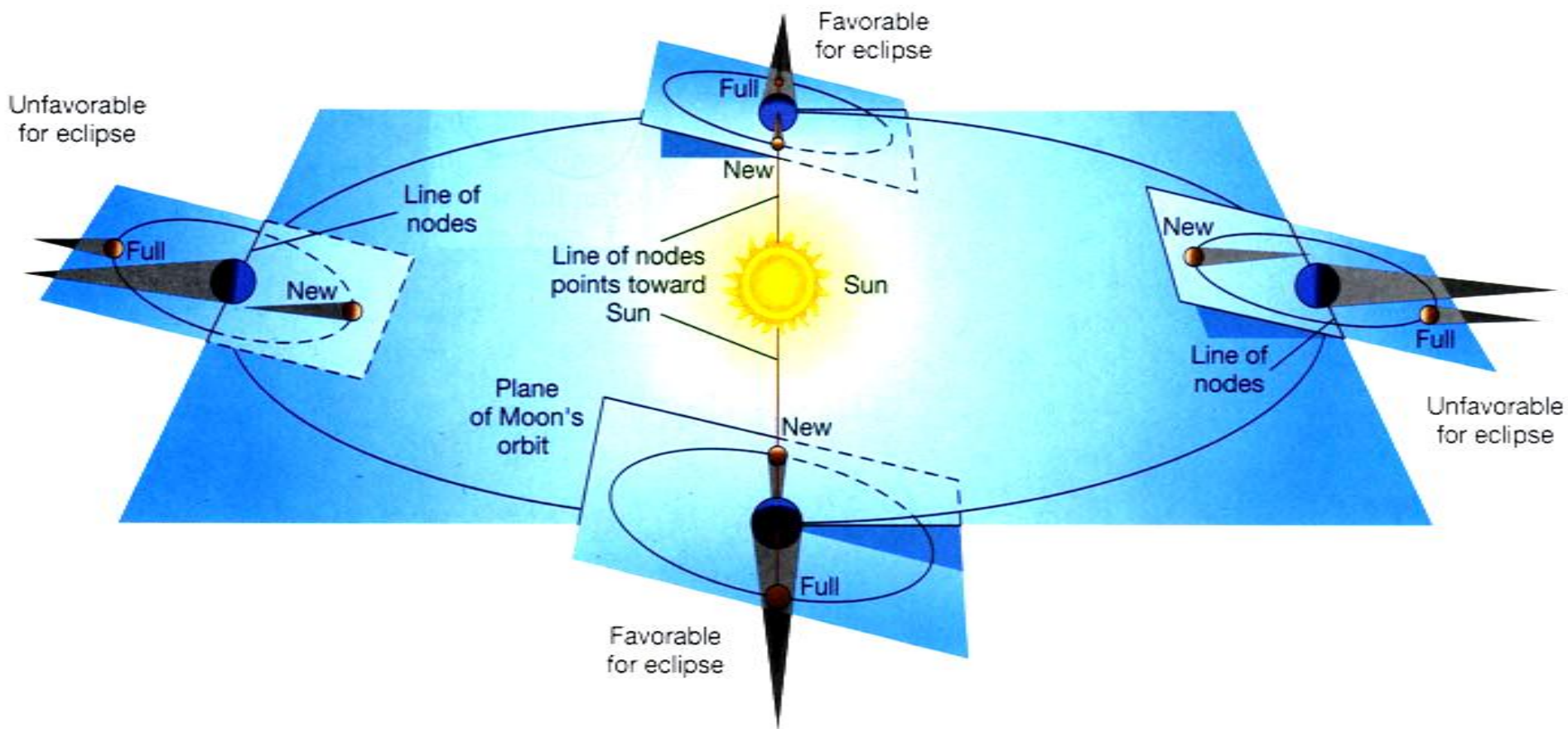


Εκλειπτική

Η τομή της ουράνιας σφαίρας με το επίπεδο της γήινης τροχιάς είναι ένας νοητός μέγιστος κύκλος και ονομάζεται **εκλειπτική**.

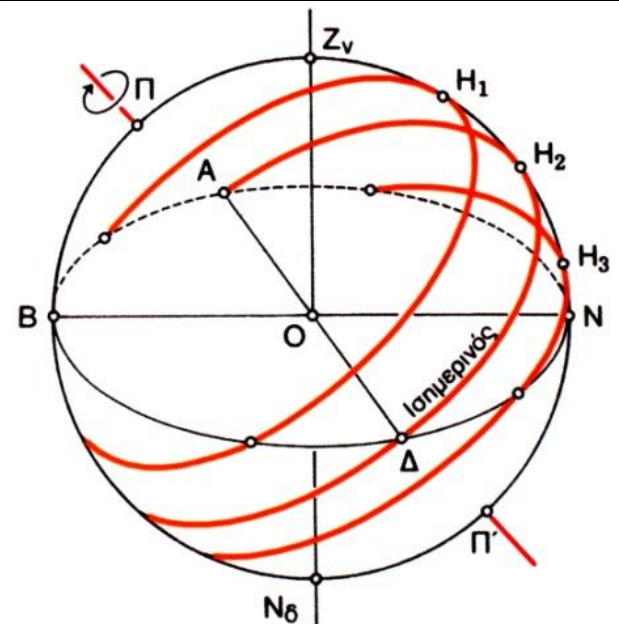
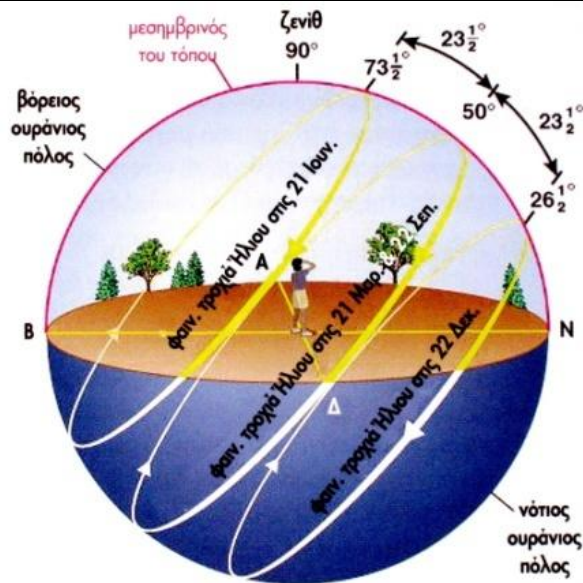
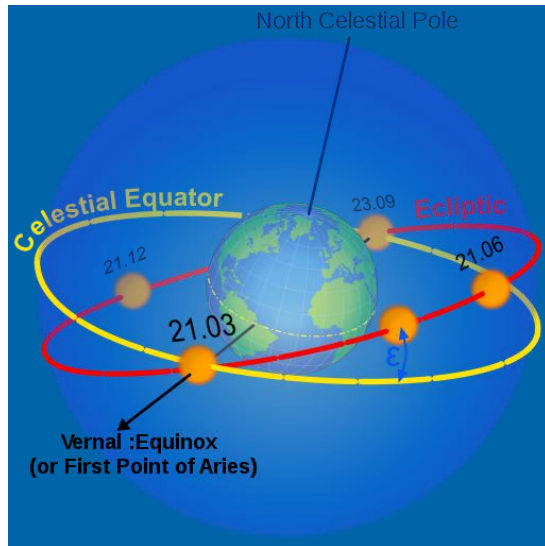
Το επίπεδο της εκλειπτικής διαφέρει από τον ουράνιο ισημερινό κατά 23.5° . Η κλίση αυτή ονομάζεται **λόξωση της εκλειπτικής**.





Εκλειπτική

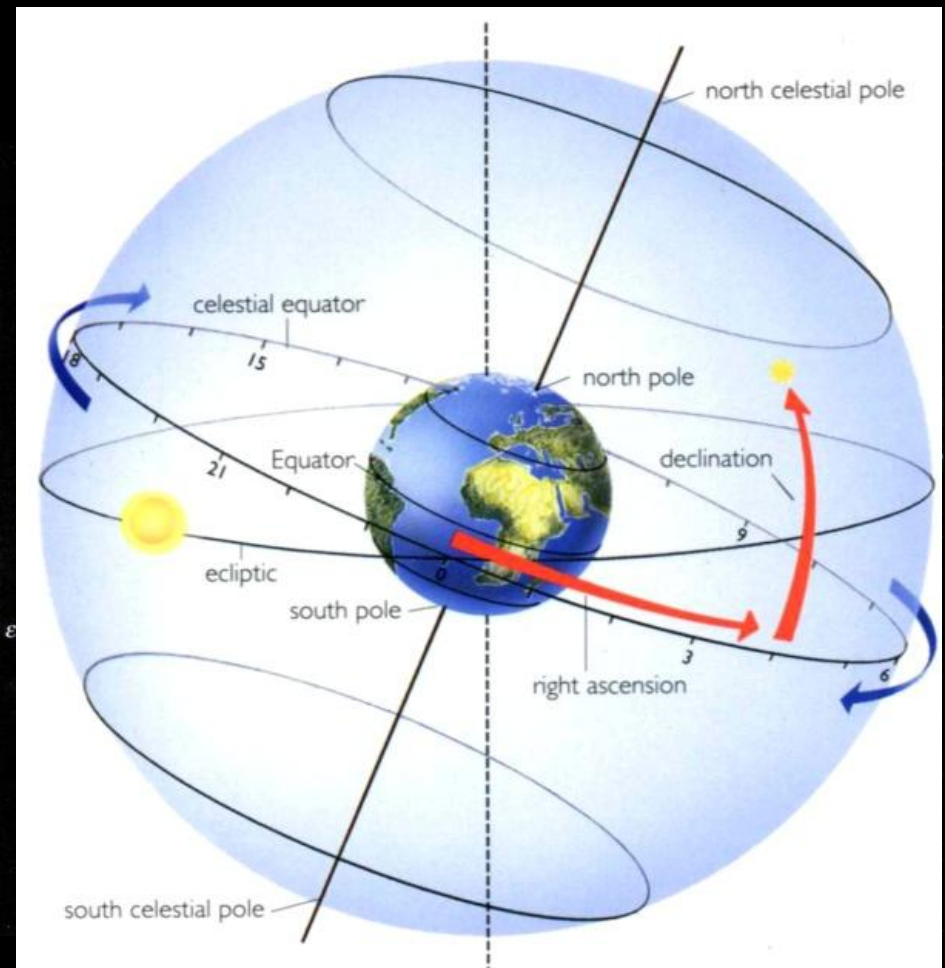
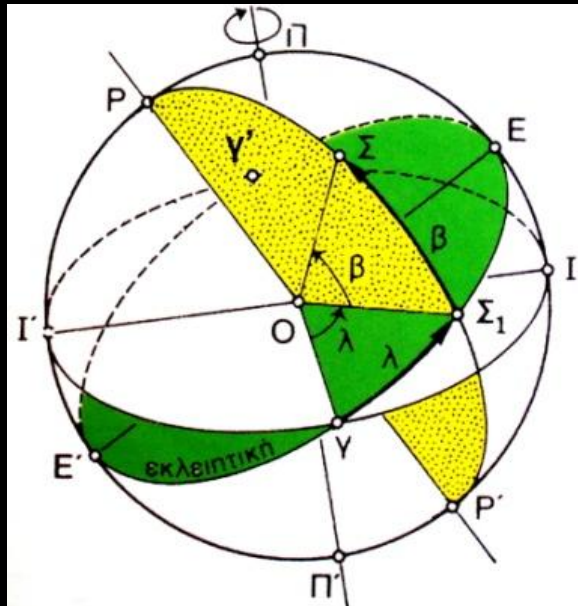
Η τομή του επιπέδου της εκλειπτικής και του ουράνιου ισημερινού είναι μια γραμμή, η οποία τέμνει την ουράνια σφαίρα σε δύο σημεία. Τα σημεία αυτά ονομάζονται **ισημερίες**, ενώ το κατώτερο και το ανώτερο σημείο της εκλειπτικής ονομάζονται **ηλιοστάσια**.



Εκλειπτικές Συντεταγμένες

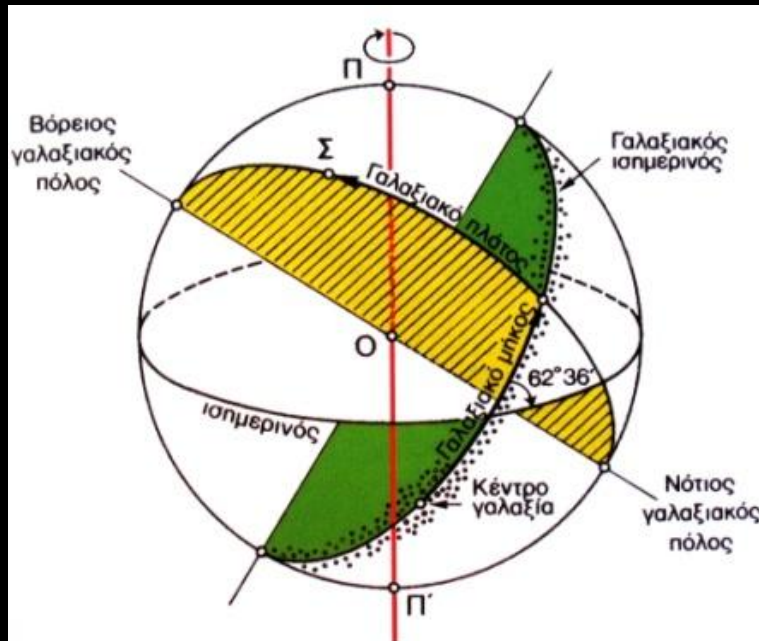
Βασικός κύκλος: εκλειπτική
Πρώτος κάθετος: διέρχεται από τους
πόλους της εκλειπτικής και από το
εαρινό ισημερινό σημείο γ

εκλειπτικό μήκος, λ (ecl. longitude, λ)
εκλειπτικό πλάτος, β (ecl. latitude, β)

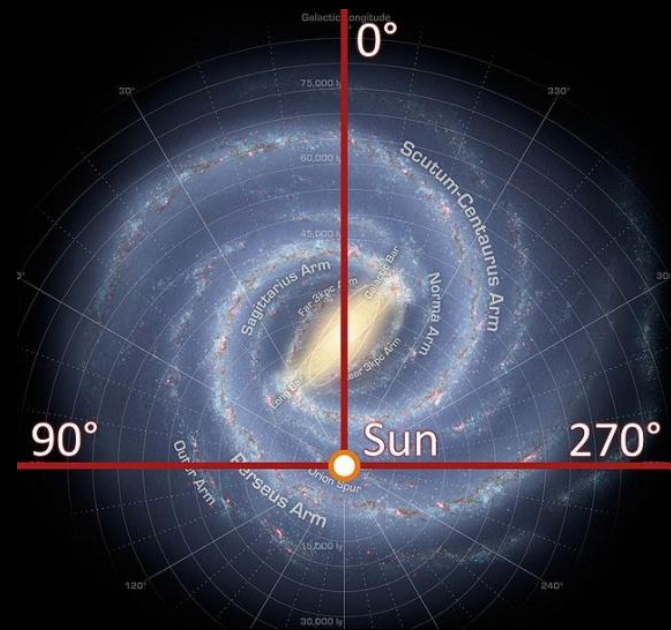


Γαλαξιακές Συντεταγμένες

Βασικός κύκλος: γαλαξιακό επίπεδο
Πρώτος κάθετος: μέγιστος κύκλος που περνάει από τους πόλους Q και Q' και το κέντρο C του γαλαξία



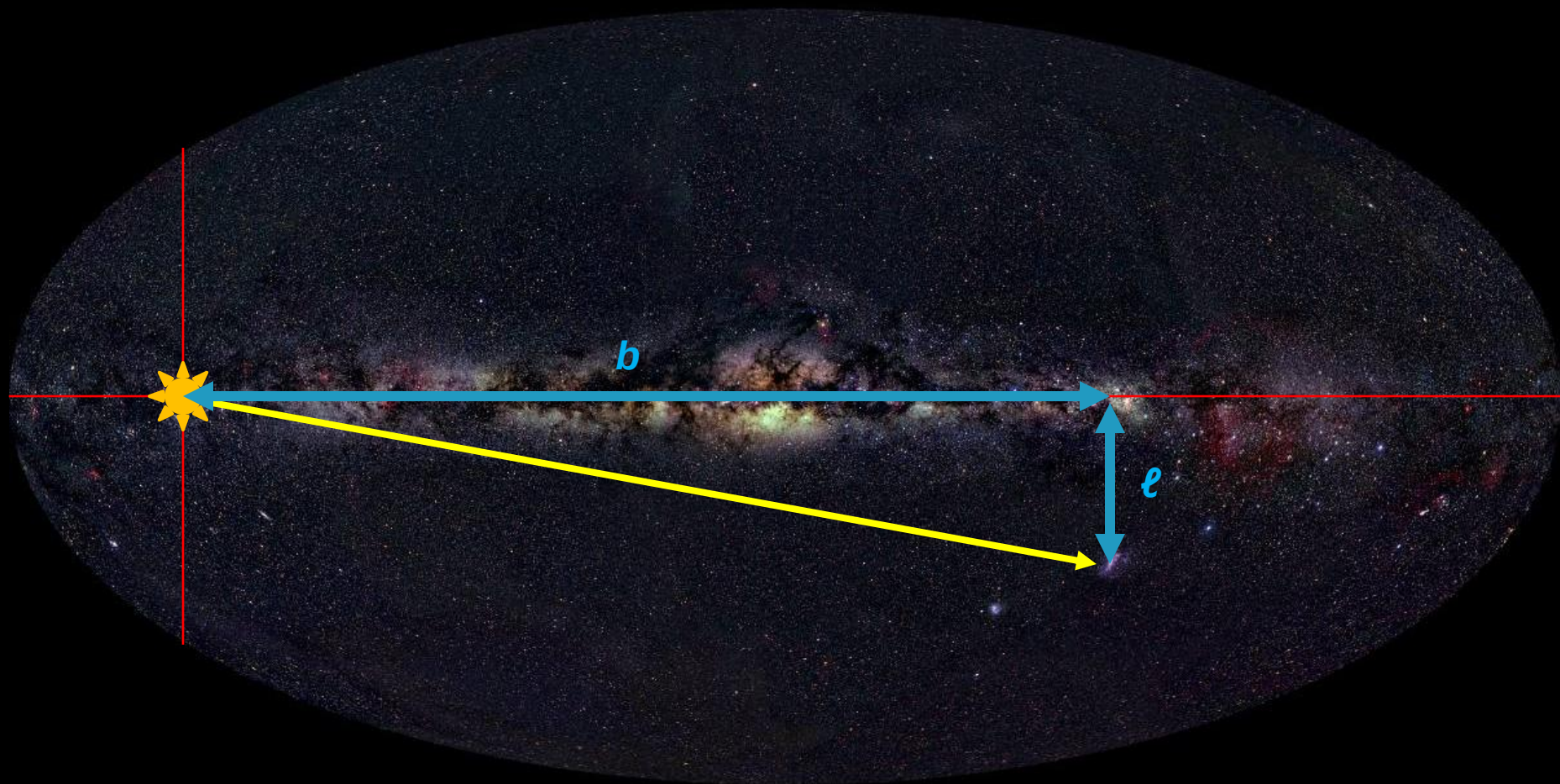
γαλαξιακό μήκος, b (gal. azimuth, b)
γαλαξιακό πλάτος, ℓ (gal. altitude, ℓ)



το **Γαλαξιακό μήκος** ℓ μετριέται πάνω στον γαλαξιακό ισημερινό με αρχή το C (γαλαξιακό κέντρο) κατά την ορθή φορά (τιμές 0-360°)

το **Γαλαξιακό πλάτος** b μετριέται πάνω στο μέγιστο κύκλο και παίρνει τιμές $\pm 90^\circ$

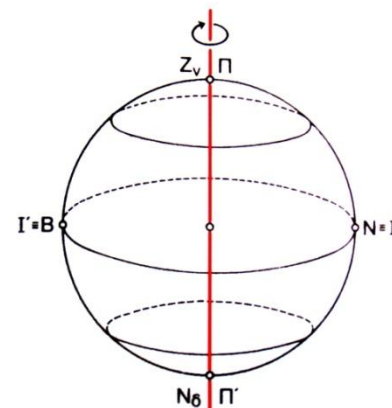
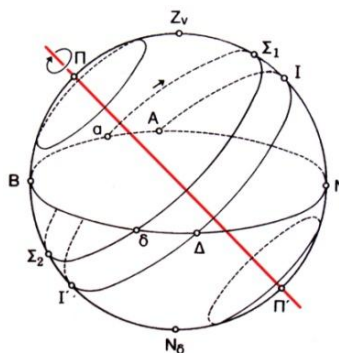
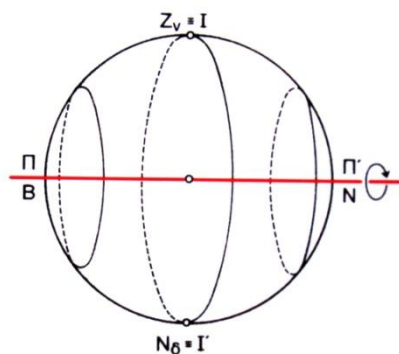
Γαλαξιακές Συντεταγμένες



Αειφανείς – Αφανείς – Αμφιφανείς Αστέρες

Όλα τα ουράνια σώματα, έτσι και οι αστέρες χωρίζονται σε 3 κατηγορίες, ανάλογα με το εάν φαίνονται από έναν συγκεκριμένο τόπο. Έτσι, έχουμε τους:

- **αειφανείς αστέρες**: είναι οι αστέρες που βρίσκονται μονίμως πάνω από τον ορίζοντα του τόπου και καθώς γυρίζουν γύρω από τον ουράνιο πόλο δε δύνουν ποτέ και είναι συνεχώς ορατοί ($90 > \delta > 90 - \varphi$)
- **αφανείς αστέρες**: είναι οι αστέρες που βρίσκονται μονίμως κάτω από τον ορίζοντα του τόπου και δεν ανατέλλουν ποτέ, συνεπώς είναι συνεχώς αόρατοι ($\varphi - 90 > \delta > -90$)
- **αμφιφανείς αστέρες**: είναι οι αστέρες που ανατέλλουν και δύνουν περιοδικά από τον συγκεκριμένο τόπο, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται και να αποκρύπτονται μέσα σε ένα 24ωρο ($90 - \varphi > \delta > \varphi - 90$)



Σφάλματα στη μέτρηση της θέσης των αστέρων

Στον προσδιορισμό της θέσης των ουρανίων σωμάτων υπεισέρχονται σφάλματα των οργάνων μέτρησης αλλά και άλλα που οφείλονται κυρίως:

Στη διάθλαση

(από τη γήινη ατμόσφαιρα)

Στο βάθος του ορίζοντα

(λόγω της σφαιρικότητας της Γης)

Στην αποπλάνηση του φωτός

(λόγω της κίνησης της Γης)

Στην ετήσια παράλλαξη

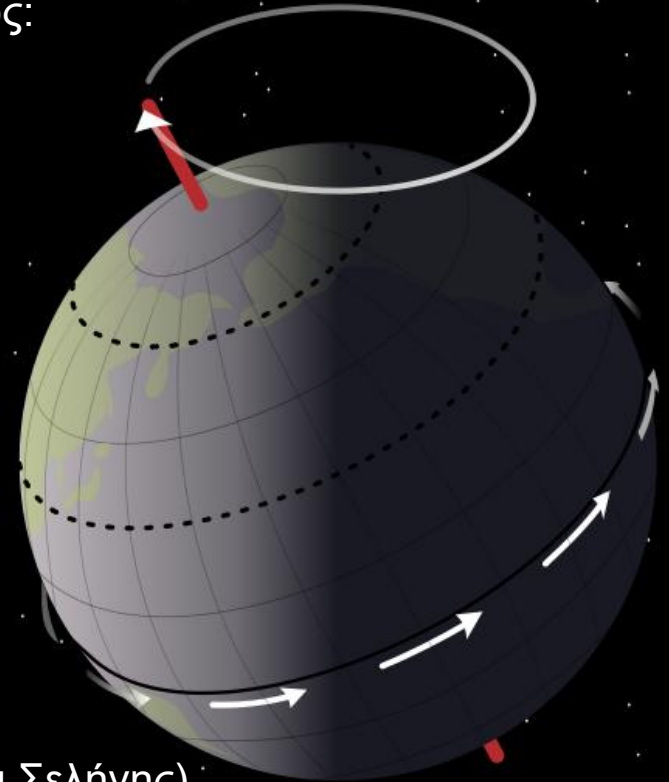
(λόγω της περιφοράς της Γης γύρω από τον Ήλιο)

Στη μετάπτωση των ισημεριών

(λόγω βαρυτικής αλληλεπίδρασης μεταξύ Γης, Ηλίου και Σελήνης)

Στην κλόνηση του άξονα περιστροφής της Γης

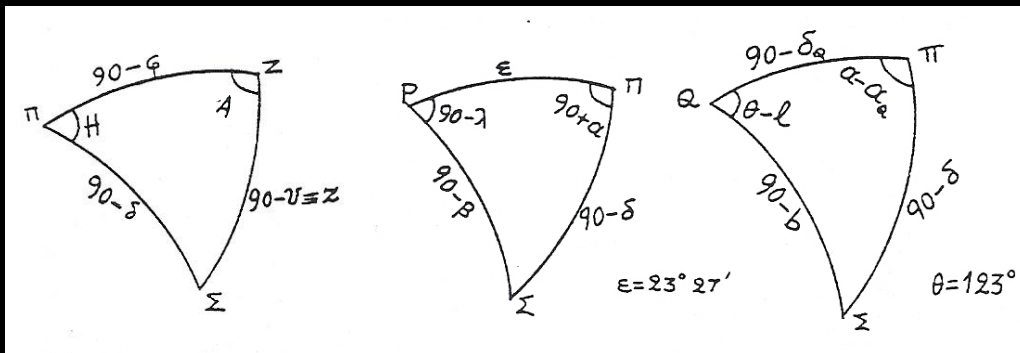
(λόγω της ροπής που ασκεί ο Ήλιος στο σύστημα Γη-Σελήνη)



Τρίγωνο θέσης αστέρα

Η φαινόμενη θέση ενός αστέρα (Σ) καθορίζεται πλήρως αν είναι γνωστές δύο τουλάχιστον γωνίες.

Τρίγωνο θέσης είναι το σφαιρικό τρίγωνο που ορίζεται από το Ζενίθ του τόπου (Z_v), τον βόρειο ουράνιο πόλο (Π) και τον αστέρα (Σ).



Χρήσιμες σχέσεις στη σφαιρική τριγωνομετρία:

Σχέση του συνημιτόνου

$$\cos a = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

Σχέση του ημιτόνου

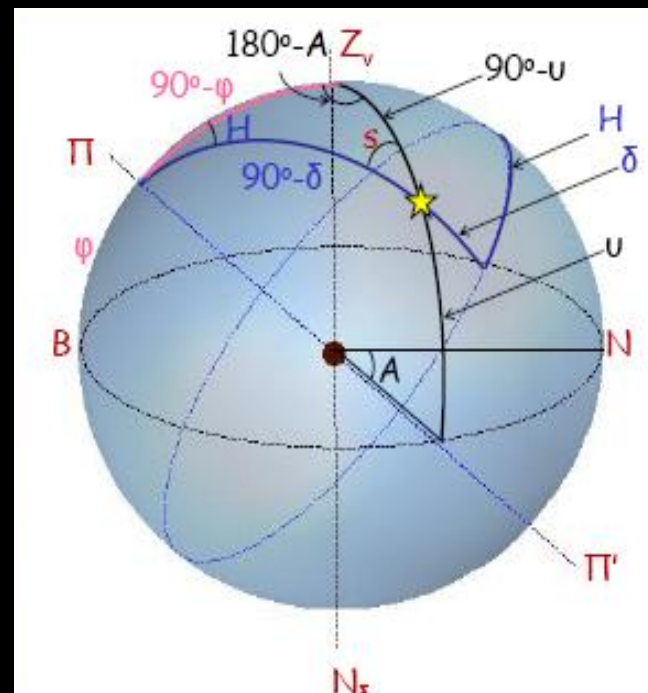
$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin \Gamma}$$

Σχέση των πέντε στοιχείων

$$\sin \gamma \cos A = \cos a \sin \beta - \sin a \cos \beta \cos \Gamma$$

Σχέση των τεσσάρων διαδοχικών στοιχείων

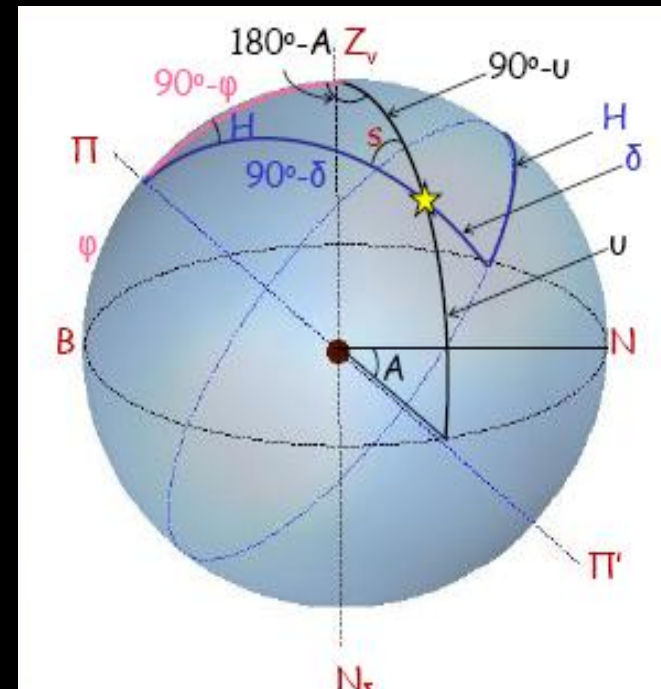
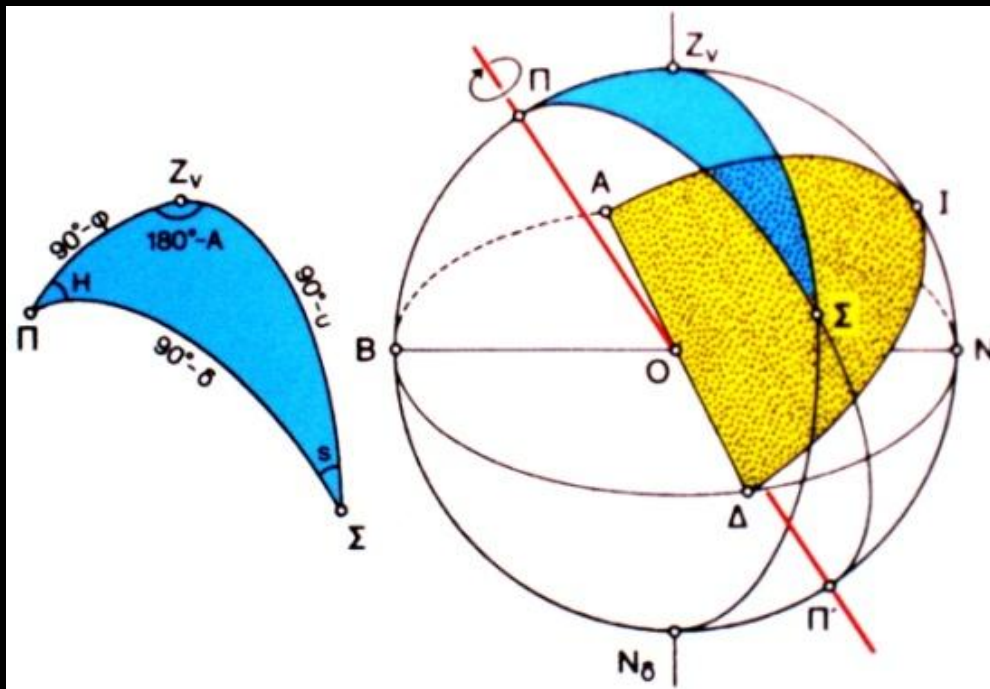
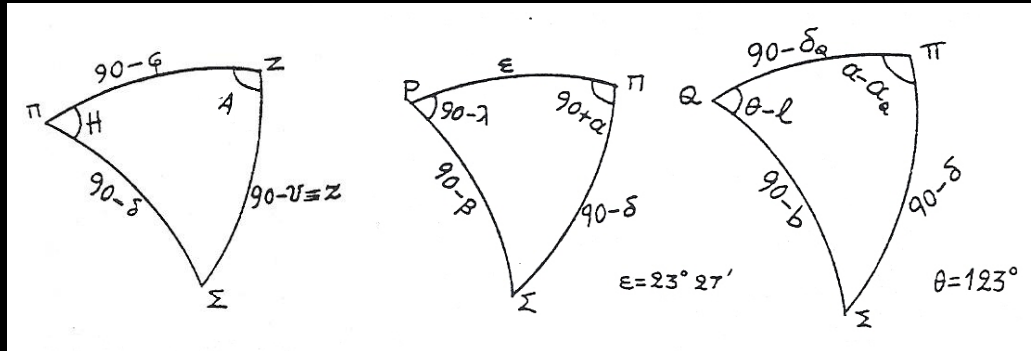
$$\cos \beta \cos \Gamma = \sin \beta \cot \alpha - \sin \Gamma \cot A$$



Τρίγωνο θέσης αστέρα

Η φαινόμενη θέση ενός αστέρα (Σ) καθορίζεται πλήρως αν είναι γνωστές δύο τουλάχιστον γωνίες.

Τρίγωνο θέσης είναι το σφαιρικό τρίγωνο που ορίζεται από το Ζενίθ του τόπου (Z_v), τον βόρειο ουράνιο πόλο (Π) και τον αστέρα (Σ).



Ανατολή και Δύση αστερων

Η ανατολή και η δύση «μεταφράζεται» σε συντεταγμένες με βάση τον ορίζοντα του τόπου, δηλαδή πρόκειται για τις δύο θέσεις των αστερων όπου: $u=0$

Σχέση του συνημιτόνου:

$$\cos a = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

$$\cos(90 - \nu) = \cos(90 - \varphi) \cos(90 - \delta) + \sin(90 - \varphi) \sin(90 - \delta) \cos H$$

$$0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H$$

$$\cos H = -\tan \varphi \tan \delta$$

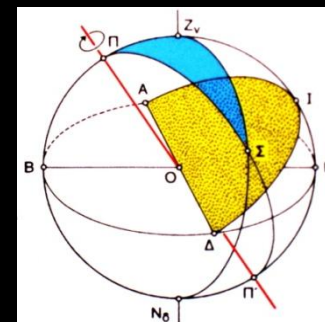
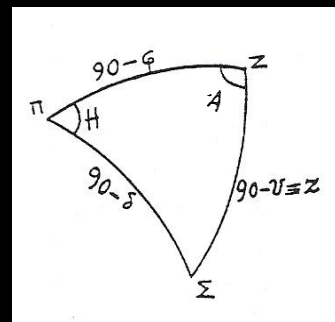
Επίσης:

$$\cos a = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

$$\cos(90 - \delta) = \cos(90 - \varphi) \cos(90 - \nu) + \sin(90 - \varphi) \sin(90 - \nu) \cos A$$

$$\sin \delta = \cos \varphi \cos A$$

$$\cos A = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$$



Συσχέτιση οριζόντιων και ισημερινών συντεταγμένων

Σχέση του συνημιτόνου:

$$\cos a = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

$$\cos(90 - \delta) = \cos(90 - \varphi) \cos(90 - \nu) + \sin(90 - \varphi) \sin(90 - \nu) \cos A$$

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin \nu + \cos \varphi \cos \nu \cos A$$

Οριζόντιες συντεταγμένες: (A, ν)

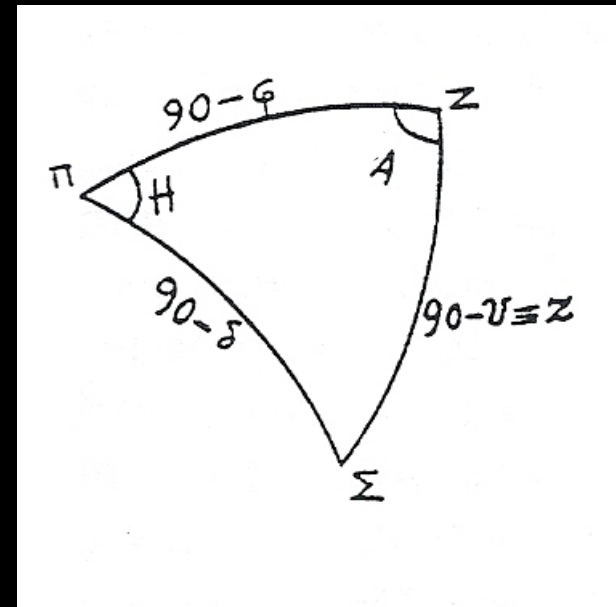
Ισημερινές συντεταγμένες: (H, δ)

Επίσης:

$$\cos a = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

$$\cos(90 - \nu) = \cos(90 - \delta) \cos(90 - \varphi) + \sin(90 - \delta) \sin(90 - \varphi) \cos H$$

$$\sin \nu = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H$$



Συσχέτιση ουρανογραφικών και εκλειπτικών συντεταγμένων

Σχέση του συνημιτόνου:

$$\cos a = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

$$\cos(90 - \delta) = \cos \varepsilon \cos(90 - \beta) + \sin \varepsilon \sin(90 - \beta) \cos(90 - \lambda)$$

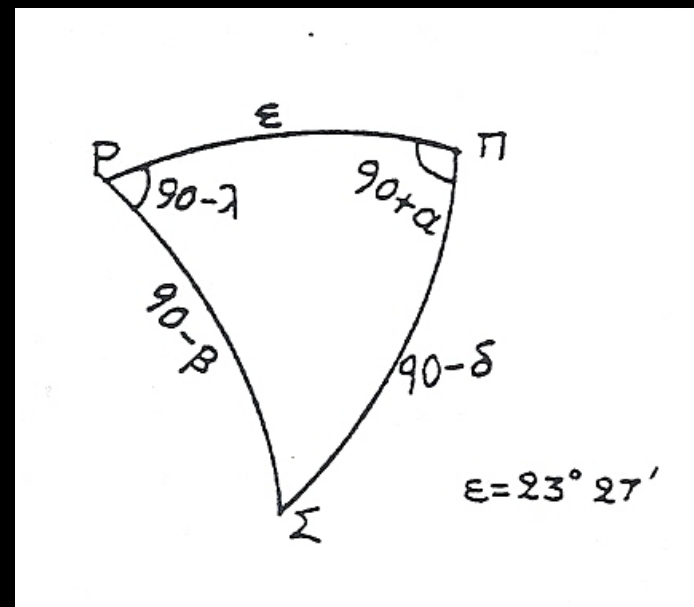
$$\sin \delta = \cos \varepsilon \sin \beta + \sin \varepsilon \cos \beta \sin \lambda$$

Σχέση του ημιτόνου:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin \Gamma}$$

$$\sin(90 + \alpha) \sin(90 - \delta) = \sin(90 - \lambda) \sin(90 - \beta)$$

$$\sin \alpha \cos \delta = \cos \lambda \cos \beta$$



Ομοίως προκύπτει:

$$\sin \beta = \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \alpha \sin \varepsilon$$

$$\cos \lambda \cos \beta = \cos \alpha \cos \delta$$

Ουρανογραφικές συντεταγμένες: (α, δ)

Εκλειπτικές συντεταγμένες: (λ, β)

Συσχέτιση ουρανογραφικών και γαλαξιακών συντεταγμένων

Σχέση του συνημιτόνου:

$$\cos a = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

$$\cos(90 - b) = \cos(90 - \delta_Q) \cos(90 - \delta) + \sin(90 - \delta_Q) \sin(90 - \delta) \cos(\alpha - \alpha_Q)$$

$$\sin b = \sin \delta_Q \sin \delta + \cos \delta_Q \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_Q)$$

Σχέση του ημιτόνου:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin \Gamma}$$

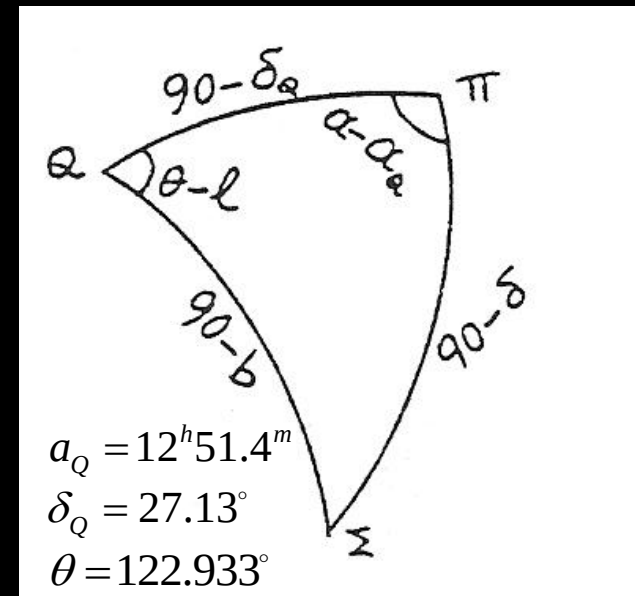
$$\sin(90 - b) \sin(\theta - l) = \sin(90 - \delta) \sin(\alpha - \alpha_Q)$$

$$\cos b \sin(\theta - l) = \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_Q)$$

Ομοίως προκύπτει:

$$\sin \delta = \sin \delta_Q \sin b + \cos \delta_Q \cos b \cos(\theta - l)$$

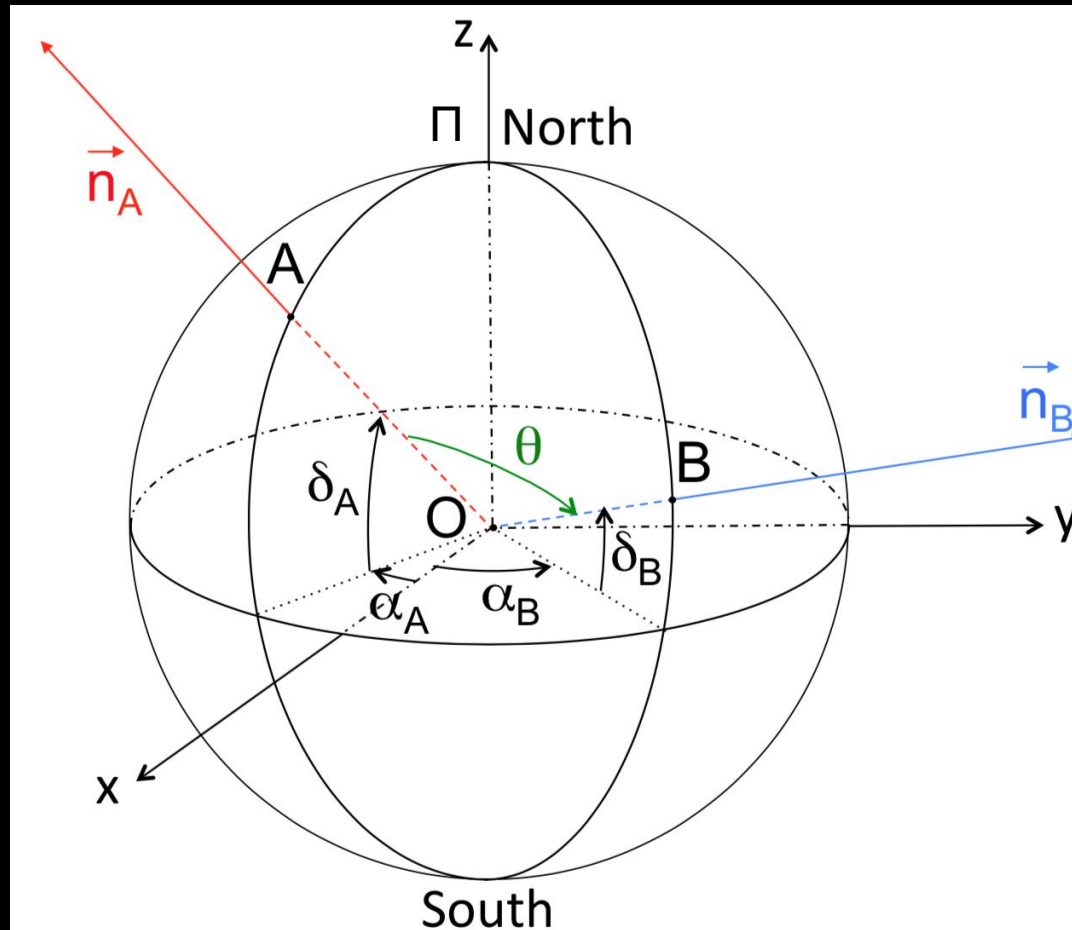
$$\cos \delta \sin(\alpha - \alpha_Q) = \cos b \sin(\theta - l)$$



Ουρανογραφικές συντεταγμένες: (α, δ)

Γαλαξιακές συντεταγμένες: (l, b)

Γωνιακή απόσταση αστέρων



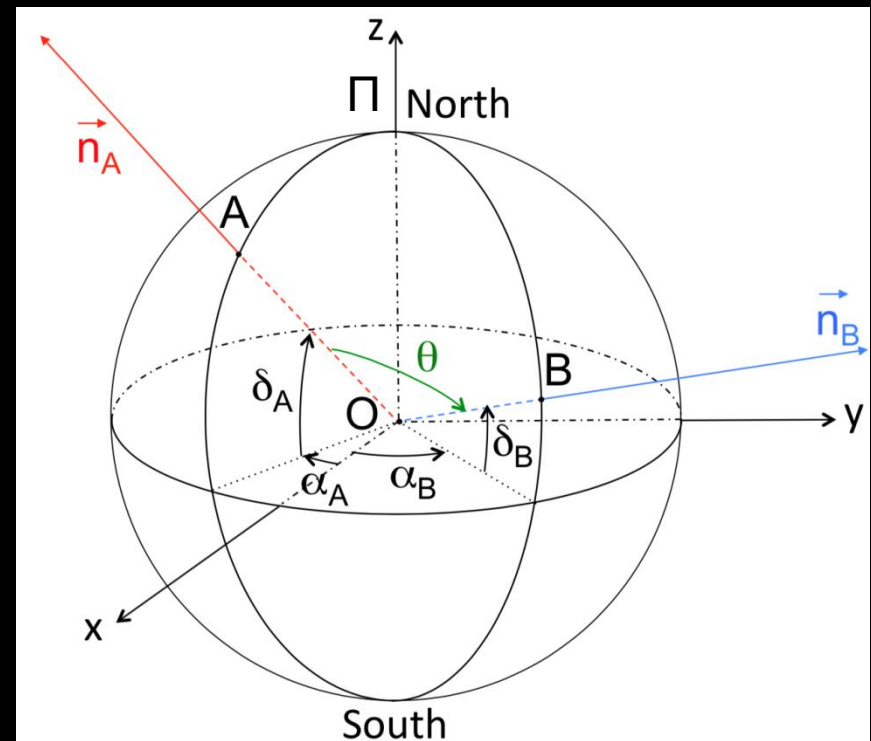
Γωνιακή απόσταση αστέρων

Σχέση του συνημιτόνου (τρίγωνο ΑΠΒ):

$$\cos a = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

$$\cos \theta = \cos(90 - \delta_A) \cos(90 - \delta_B) + \sin(90 - \delta_A) \sin(90 - \delta_B) \cos(\alpha_A - \alpha_B)$$

$$\cos \theta = \sin \delta_A \sin \delta_B + \cos \delta_A \cos \delta_B \cos(\alpha_A - \alpha_B)$$



(μικρή) Γωνιακή απόσταση αστερών

Σχέση του συνημιτόνου (τρίγωνο ΑΠΒ):

$$\cos a = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

$$\cos \theta = \cos(90 - \delta_A) \cos(90 - \delta_B) + \sin(90 - \delta_A) \sin(90 - \delta_B) \cos(\alpha_A - \alpha_B)$$

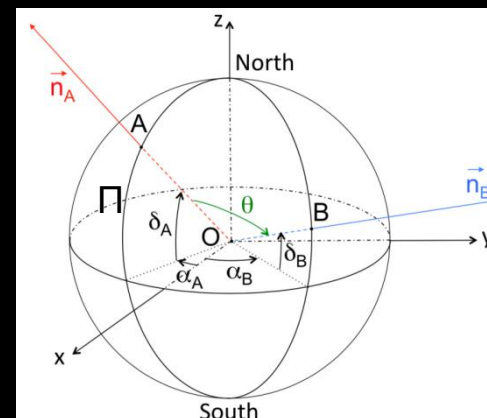
$$\cos \theta = \sin \delta_A \sin \delta_B + \cos \delta_A \cos \delta_B \cos(\alpha_A - \alpha_B)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$1 - \frac{\theta^2}{2} = \sin \delta_A \sin \delta_B + \cos \delta_A \cos \delta_B \left[1 - \frac{(\alpha_A - \alpha_B)^2}{2} \right]$$

$$1 - \frac{\theta^2}{2} = [\sin \delta_A \sin \delta_B + \cos \delta_A \cos \delta_B] - \cos \delta_A \cos \delta_B \left[\frac{(\alpha_A - \alpha_B)^2}{2} \right]$$

$$1 - \frac{\theta^2}{2} = \cos(\delta_A - \delta_B) - \cos \delta_A \cos \delta_B \left[\frac{(\alpha_A - \alpha_B)^2}{2} \right]$$



(μικρή) Γωνιακή απόσταση αστερών

$$1 - \frac{\theta^2}{2} = \cos(\delta_A - \delta_B) - \cos \delta_A \cos \delta_B \left[\frac{(\alpha_A - \alpha_B)^2}{2} \right]$$

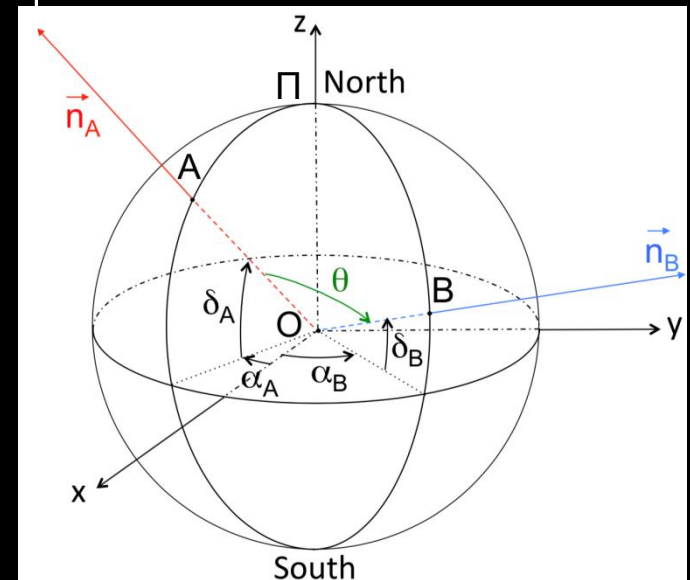
$$1 - \frac{\theta^2}{2} = 1 - \frac{(\delta_A - \delta_B)^2}{2} - \cos \delta_A \cos \delta_B \left[\frac{(\alpha_A - \alpha_B)^2}{2} \right]$$

$$\delta_A - \delta_B \ll 1 \quad \alpha_A - \alpha_B \ll 1$$

$$1 - \frac{\theta^2}{2} = 1 - \frac{(\delta_A - \delta_B)^2}{2} - \cos^2 \delta_A \left[\frac{(\alpha_A - \alpha_B)^2}{2} \right]$$

$$\theta^2 = (\delta_A - \delta_B)^2 + \cos^2 \delta_A (\alpha_A - \alpha_B)^2$$

$$\theta = \sqrt{(\delta_A - \delta_B)^2 + \cos^2 \delta_A (\alpha_A - \alpha_B)^2}$$



(μικρή) Γωνιακή απόσταση αστείων

$$\theta = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$$

ΌΤΟΥ:

$$\delta\chi = (a_A - a_B) \cos \delta_A$$

$$\delta y = \delta_A - \delta_B$$

ΕΠΟΜΕΝΩΣ:

$$\theta = \sqrt{(\delta_A - \delta_B)^2 + \cos^2 \delta_A (\alpha_A - \alpha_B)^2}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

- Το δy αντιστοιχεί στη διαφορά της απόκλισης $\delta_A - \delta_B$
- Το δx αντιστοιχεί στη διαφορά της ορθής αναφοράς $\alpha_A - \alpha_B$, διορθωμένη κατά $\cos \delta_A$, καθώς το τμήμα της σφαίρας ακτίνας R σε απόκλιση δ_A είναι: $R' = R \cos \delta_A$

