

Ιατρική Φυσική

Ε.Κ.Π.Α. 2019-2020

Ε. Στυλιάρης – Π. Παπαγιάννης

Ακτινοπροστασία:

- Βιολογικές επιδράσεις ιοντιζουσών ακτινοβολιών
- Διεθνές σύστημα ακτινοπροστασίας

Δοσιμετρία:

- Εξωτερική (υπολογιστική, πειραματική)
- Εσωτερική

Π. Ι. Παπαγιάννης
Αν. Καθ.

Εργαστήριο Ιατρικής Φυσικής
Ιατρική Σχολή Αθηνών



210 7462442



ppapagi@med.uoa.gr



<http://mpl.med.uoa.gr/>
<http://www.rdl.gr/>

Έμμεσα ιοντίζουσα ακτινοβολία:

Σημειακό-ισοτροπικό μοντέλο ...

**Μπορούμε να υπολογίσουμε το ρυθμό δόσης σε
απόσταση x από σημειακή πηγή γνωστής
ενεργότητας, δεδομένων των συντελεστών
αλληλεπίδρασης;**

Έμμεσα ιοντίζουσα ακτινοβολία:

Σημειακό-ισοτροπικό μοντέλο ...

Πότε ισούται το collisional ΚΕΡΜΑ με τη Δόση...;

**Έμμεσα ιοντίζουσα ακτινοβολία:
Πότε ισούται το collisional ΚΕΡΜΑ με τη Δόση...;**

Υπό συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας (CPE)

Συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας υφίστανται σε όγκο v εάν κάθε φορτισμένο σωματίδιο δεδομένου είδους και ενέργειας που εγκαταλείπει τον v , αναπληρώνεται από ένα πανομοιότυπο σωματίδιο με την ίδια ενέργεια που εισέρχεται στον v .

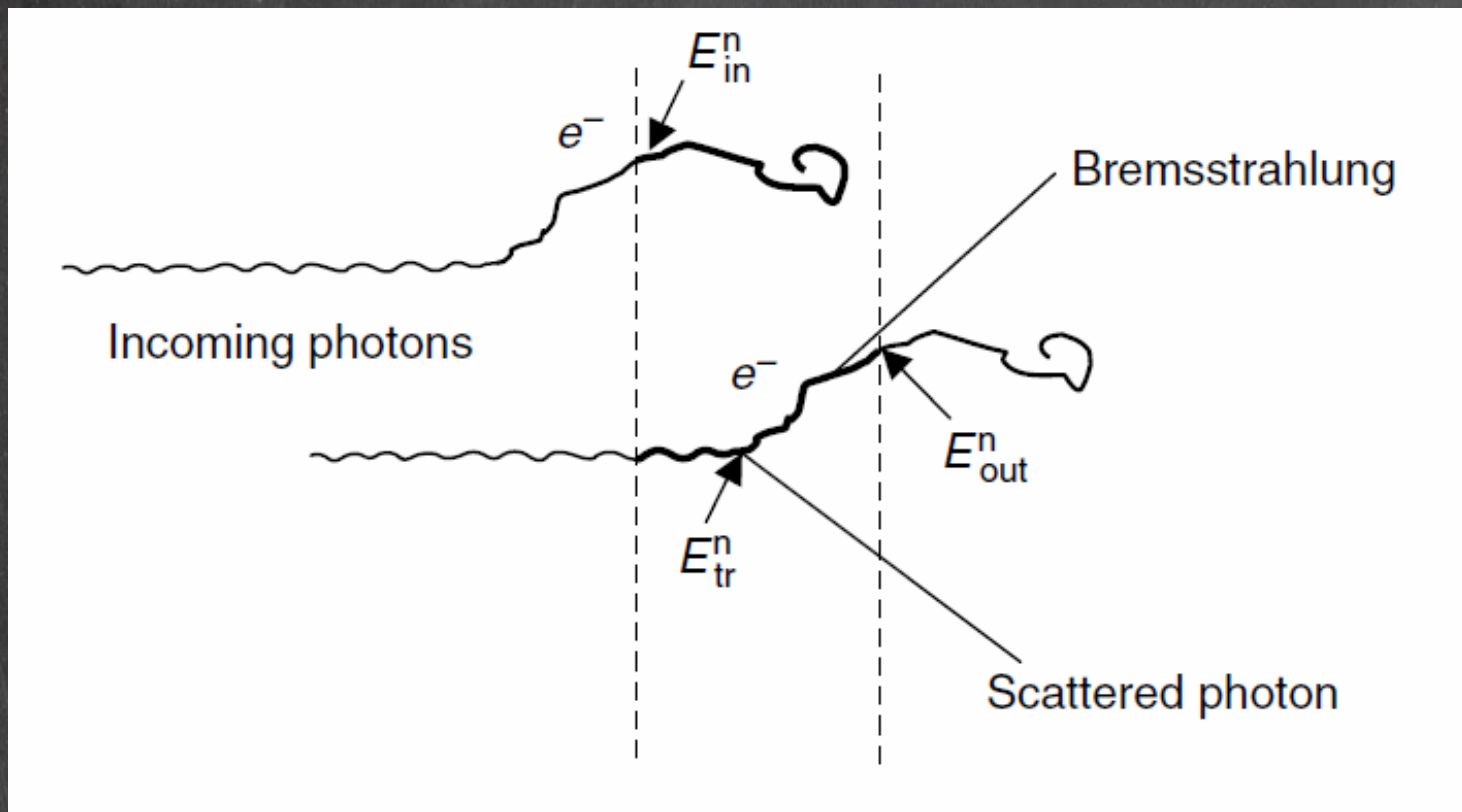
Συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας (CPE)

$$\varepsilon = E_{tr}^n - E_{out}^n + E_{in}^n$$

$$E_{in}^n = E_{out}^n$$

$$\varepsilon = E_{tr}^n$$

$$K_{col}^{CPE} = D$$



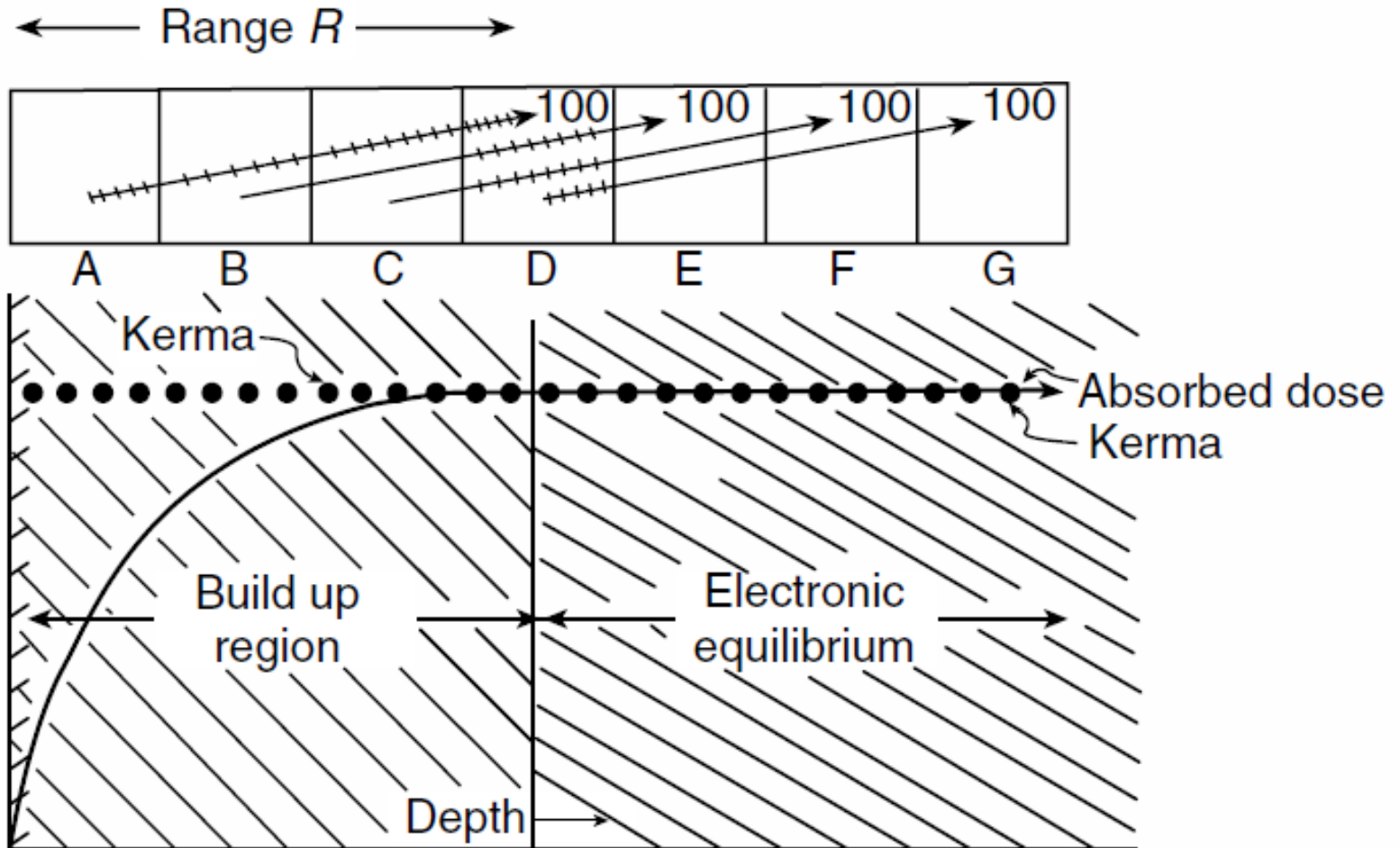
Πότε υφίστανται συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας...;

Όταν όγκος v περιέχεται σε όγκο V έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ των ορίων τους είναι μεγαλύτερη από την μέγιστη εμβέλεια των δευτερογενών φορτισμένων σωματιδίων, συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας υφίστανται στον v όταν για τον V ισχύει:

- 1. Ομοιογένεια ατομικής σύστασης**
- 2. Ομοιογένεια πυκνότητας**
- 3. Ομοιόμορφη ακτινοβολήση (ομοιόμορφο πεδίο έμμεσα ιοντίζουσας ακτινοβολίας και αμελητέα εξασθένιση)**
- 4. Απουσία ανομοιογενούς ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου**

Πότε υφίστανται συνθήκες ηλεκτρονικής ισορροπίας...;

Περιοχή επαύξησης της δόσης (build up)



Πότε υφίστανται συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας...;

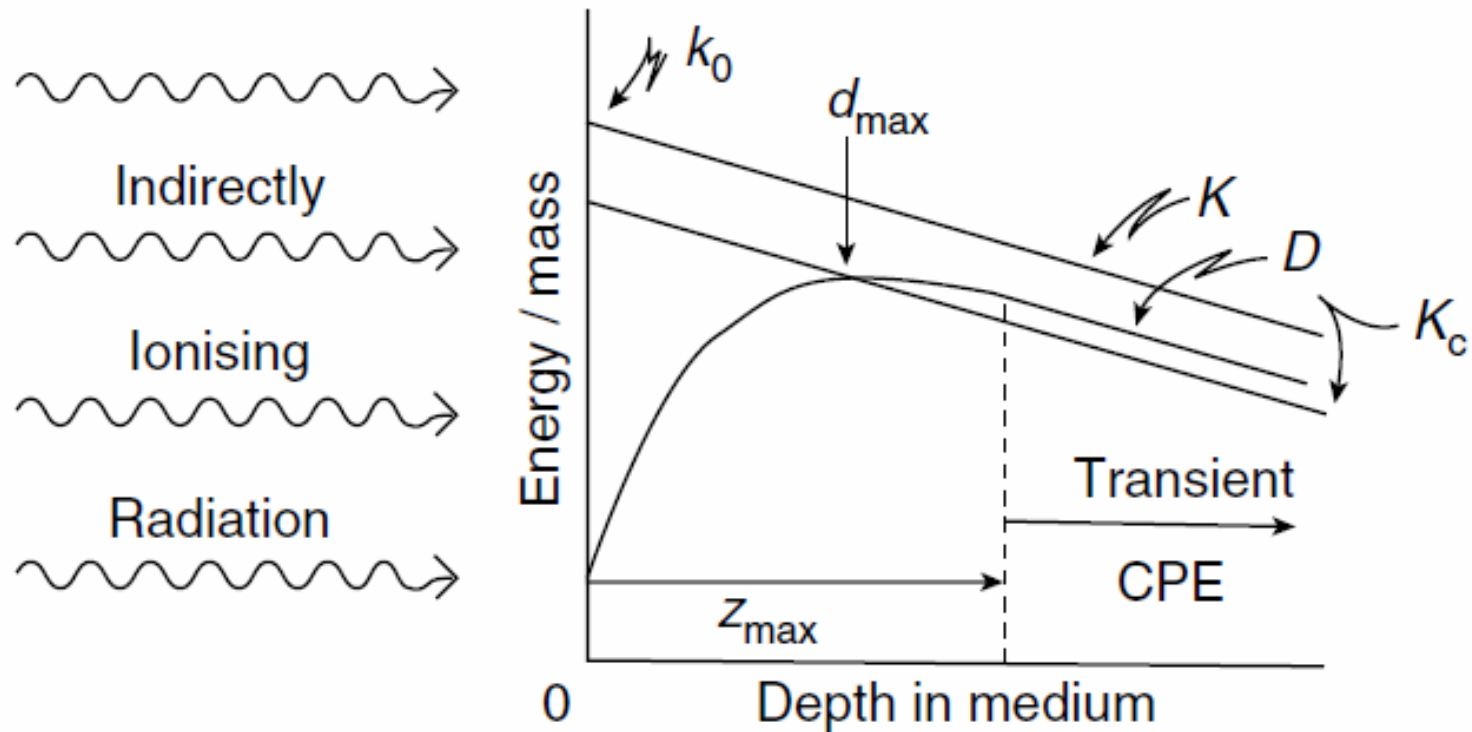
Το αποτέλεσμα της εξασθένησης των φωτονίων

Approximate Thickness of Water Required to Establish Transient Charged Particle Equilibrium.

Maximum Energy of Photons (MeV)	Approximate Thickness of Water for Equilibrium (mm)	Approximate Photon Attenuation (%)
0.3	0.1	0.03
0.6	0.4	0.1
1	0.8	0.3
2	2.5	0.8
3	8	2
6	15	4
8	25	6
10	30	7
15	50	9
20	60	11
30	80	13

Πότε υφίστανται συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας...;

Το αποτέλεσμα της εξασθένησης των φωτονίων
παροδική (transient) CPE



Συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας δεν υφίστανται:

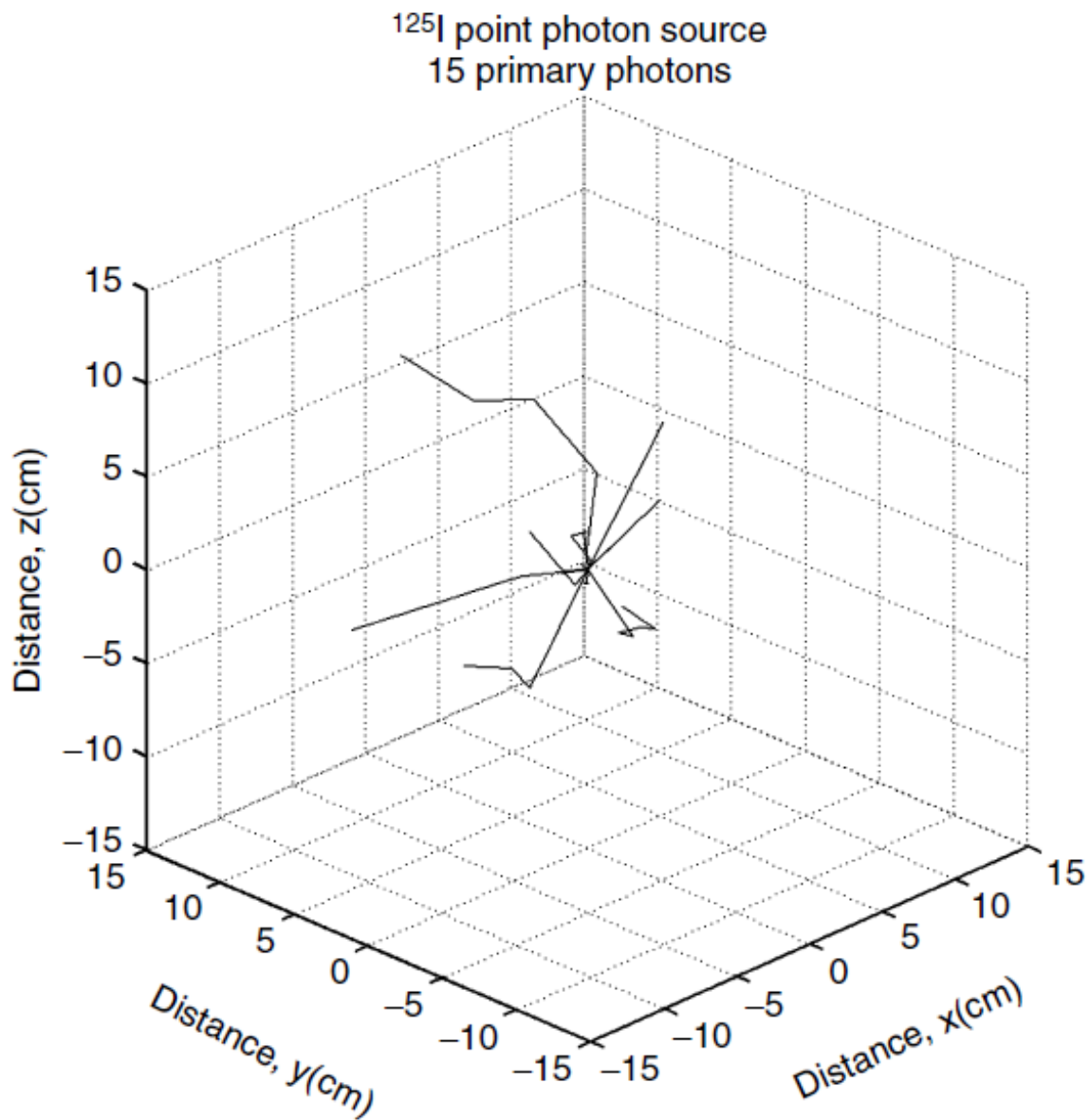
- Σε βάθος υλικού μικρότερου από την εμβέλεια των ενεργητικότερων δευτερογενών φορτισμένων σωματιδίων που παράγονται από τις αλληλεπιδράσεις με τη δέσμη
- Σε σημεία κοντά στα όρια του υλικού ή του πεδίου, αν αυτό είναι πεπερασμένων διαστάσεων σε σχέση με το ακτινοβολούμενο σώμα, ή σε δι-επιφάνειες μεταξύ διαφορετικών υλικών
- Όταν η εξασθένιση της πρωτογενούς δέσμης ακτινοβολίας κατά τη διάδοσή της σε ένα υλικό είναι σημαντική για αποστάσεις ίσες με την εμβέλεια των φορτισμένων σωματιδίων που παράγονται από τις αλληλεπιδράσεις με αυτή

Πίσω στο απλό σημειακό-ισοτροπικό μοντέλο ...

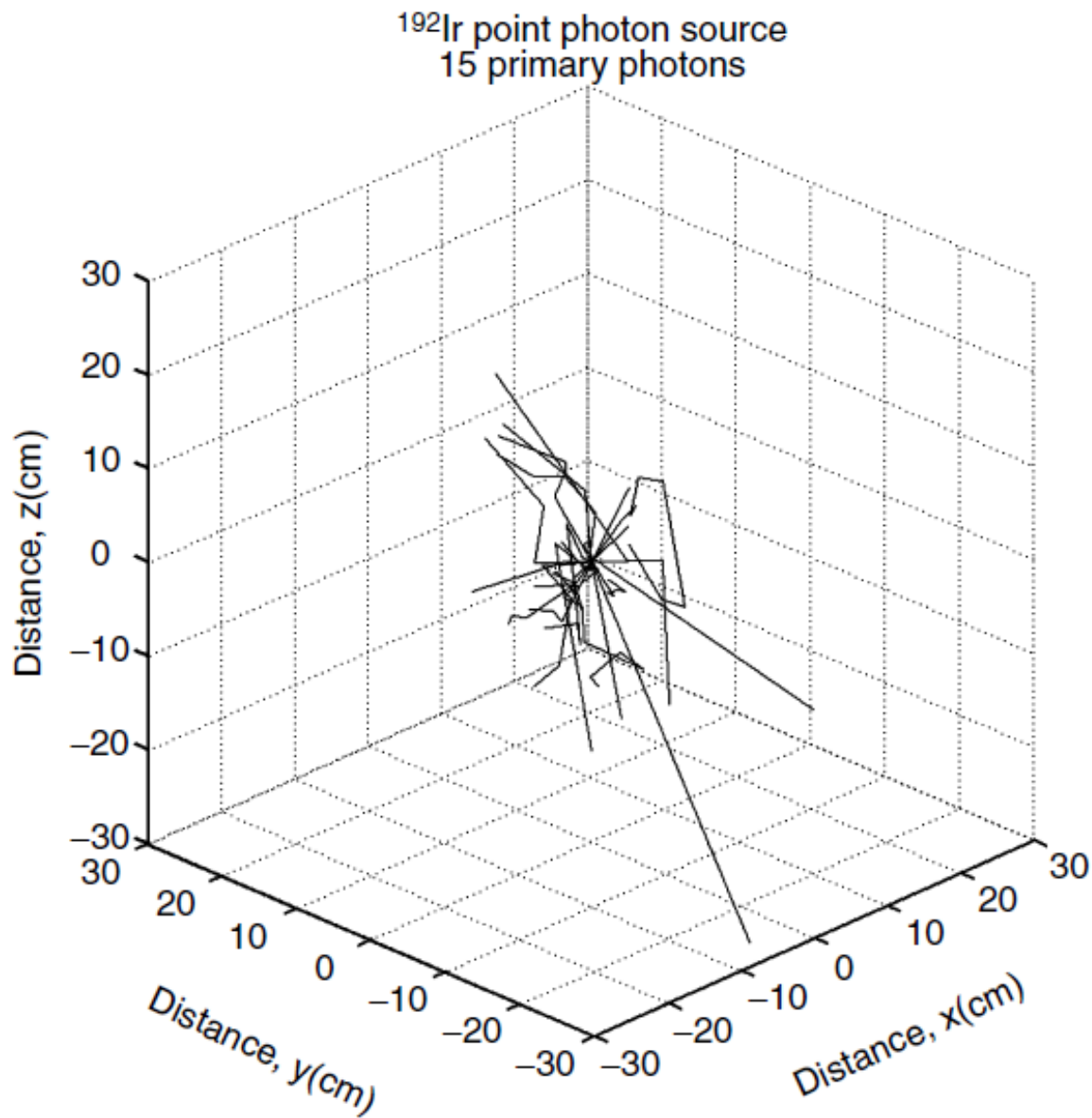
**Μπορούμε να υπολογίσουμε το ρυθμό δόσης σε
απόσταση r από σημειακή πηγή γνωστής
ενεργότητας, δεδομένων των συντελεστών
αλληλεπίδρασης;**

**Υπό συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας
και μόνο για την πρωτογενή ακτινοβολία**

Η συνδρομή της σκέδασης ...



Η συνδρομή της σκέδασης ...



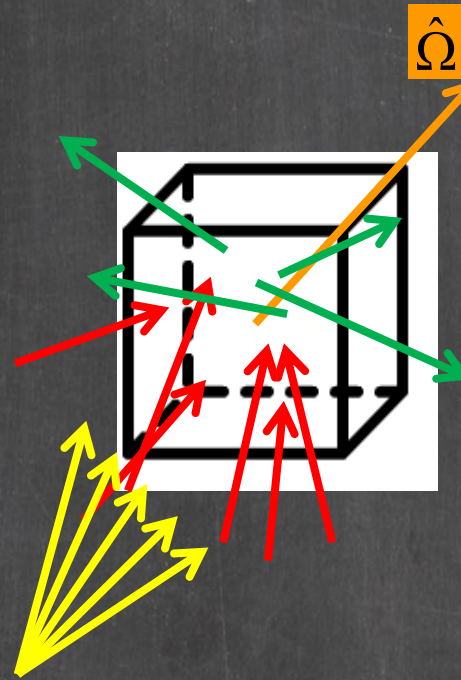
Υπάρχει εξίσωση που να περιλαμβάνει και τη σκεδαζόμενη;

Η βαθμίδα σε ένα στοιχείο του φασικού χώρου θα ισούται:

φ. που σκεδάζονται σε αυτό από τα υπόλοιπα

+ φ. που εκπέμπονται από πηγή σε αυτό

- φ. που απορροφούνται ή σκεδάζονται



$$\hat{\Omega} \cdot \nabla \Phi_{\Omega, E}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) =$$

$$Q_{sc}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega})$$

$$+ \frac{Q_{prim}(E, \hat{\Omega})}{4\pi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)$$

$$- \sigma_t(\mathbf{r}, E) \Phi_{\Omega, E}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega})$$

L.B.T.E.

Μπορεί να επιλυθεί;

$$\hat{\Omega} \cdot \nabla \Phi_{\Omega, E}^{\text{prim}} = \frac{Q_{\text{prim}}(E, \hat{\Omega})}{4\pi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) - \sigma_t(\mathbf{r}, E) \Phi_{\Omega, E}^{\text{prim}}$$



$$\hat{\Omega} \cdot \nabla \Phi_{\Omega, E}^{\text{sc}} = Q_{\text{sc}} - \sigma_t(\mathbf{r}, E) \Phi_{\Omega, E}^{\text{prim}}$$



$$Q_{\text{sc}}(\mathbf{r}, E, \hat{\Omega}) = \int_0^\infty \int_{04\pi} \sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \hat{\Omega} \cdot \hat{\Omega}') \Phi_{\Omega, E'}(\mathbf{r}, E', \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}' dE'$$

Εναλλακτικές:

Ημι-εμπειρικές μέθοδοι & στοχαστικοί (Monte Carlo) ή
ντετερμινιστικοί αλγόριθμοι
(L.B.T.E. equation solvers, μέθοδοι υπέρθεσης, ...)

Η αρχή της δοσιμετρίας με προσομοίωση Monte Carlo

Απλοί αναλυτικοί αλγόριθμοι δεν μπορούν να λάβουν υπόψη τη σκεδαζόμενη

- Εφόσον γνωρίζουμε τη Φυσική της διάδοσης ιοντ. ακτ. στην ύλη (κατανομές πιθανότητας αλληλεπίδρασης ως προς: θέση, είδος, κατανομή ενέργειας – κατεύθυνσης), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αναμενόμενες τιμές;
- Χρειαζόμαστε μια μέθοδο προσομοίωσης της φυσικής διαδικασίας που να λαμβάνει υπόψη συνολικά τις κατανομές πιθανότητας για κάθε φαινόμενο αλληλεπίδρασης

Η αρχή της δοσιμετρίας με προσομοίωση Monte Carlo

Σύμφωνα με το θεώρημα κεντρικής τιμής, το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού όμοιων, ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ακολουθεί κανονική κατανομή.

Έτσι, αν θέλω να υπολογίσω μια **άγνωστη ποσότητα**, m , με k μια **τυχαία μεταβλητή** με αναμενόμενη τιμή $E(k)=m$ και διακύμανση $Var(k)=b^2$ εάν k_1, k_2, \dots, k_N είναι N **ΤΥΧΑΙΑ** επιλεγμένες τιμές του k ,

τότε: το $\sum_{i=1}^N k_i$ ακολουθεί κανονική κατανομή με $E(\sum_{i=1}^N k_i) = Nm$ και $Var(\sum_{i=1}^N k_i) = Nb^2$

Ή ισοδύναμα:

$$P(Nm - 3b\sqrt{N} < \sum_{i=1}^N k_i < Nm + 3b\sqrt{N}) \approx 0.997$$

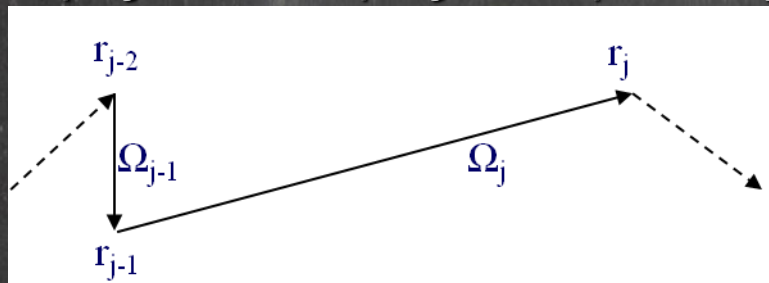
ή:

$$P(-3b/\sqrt{N} < \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i - m < 3b/\sqrt{N}) \approx 0.997$$

Έτσι αν θέλω να υπολογίσω την **ενεργειακή ροή** σε σημείο r , μπορώ να υπολογίσω τη μέση τιμή της συνεισφοράς από την «τροχιά» N **φωτονίων που θα επιλέξω τυχαία** από την κατανομή πιθανότητας που δίνει όλες τις πιθανές τροχιές

Η αρχή της δοσιμετρίας με προσομοίωση Monte Carlo

- Γνωρίζω την κατανομή πιθανότητας όλων των πιθανών τροχιών των φωτονίων;
- Κάθε τροχιά αποτελείται από διαδοχικές καταστάσεις $\mathbf{S}_j(\mathbf{r}_j, \Omega_j, E_j)$ πριν από κάθε αλληλεπίδραση j .
- Η πιθανότητα εμφάνισης κάθε κατάστασης j εξαρτάται μόνο από την πιθανότητα εμφάνισης της προηγούμενης κατάστασης $j-1$.
- Με άλλα λόγια : την πιθανότητα φωτόνιο να αλληλεπιδράσει στο \mathbf{r}_{j-1} , την πιθανότητα δεδομένου είδους αλληλεπίδρασης και την πιθανότητα κατά την αλληλεπίδραση αυτή το φωτόνιο να σκεδαστεί σε κατεύθυνση Ω_j με ενέργεια E_j δεδομένων των Ω_{j-1} και E_{j-1} .
- Αυτές οι κατανομές πιθανότητας είναι γνωστές!



- Έτσι αρκεί να έχω μια μέθοδο ΤΥΧΑΙΑΣ δειγματοληψίας από τις γνωστές κατανομές πιθανότητας

Πως επιλέγω τυχαία από γνωστή κατανομή πιθανότητας;

Υπάρχουν πολλές μαθηματικές μέθοδοι. Π.χ.:

- Θεώρημα αντιστροφής

Έστω x συνεχής τυχαία μεταβλητή στο $[a, b]$ με πυκνότητα πιθανότητας $f(x)$ και συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(x)$. Δεδομένου τυχαίου, r , στο $[0, 1]$, μια τιμή x^* του x μπορεί να επιλεγεί τυχαία ως:

$$r = F(x^*) = \int_a^{x^*} f(x) dx$$

- Αν x διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές, x_i πιθανότητας, P_i ώστε:

$$\sum_{i=1}^N P_i = 1$$

Δεδομένου τυχαίου, r , στο διάστημα $[0, 1]$, μια τιμή x^* του x μπορεί να επιλεγεί τυχαία ως:

$$x^* = x_j \text{ όπου } j = \min \left\{ j : r < \sum_{i=1}^j P_i \right\}$$

Απλά παραδείγματα για σημειακή πηγή

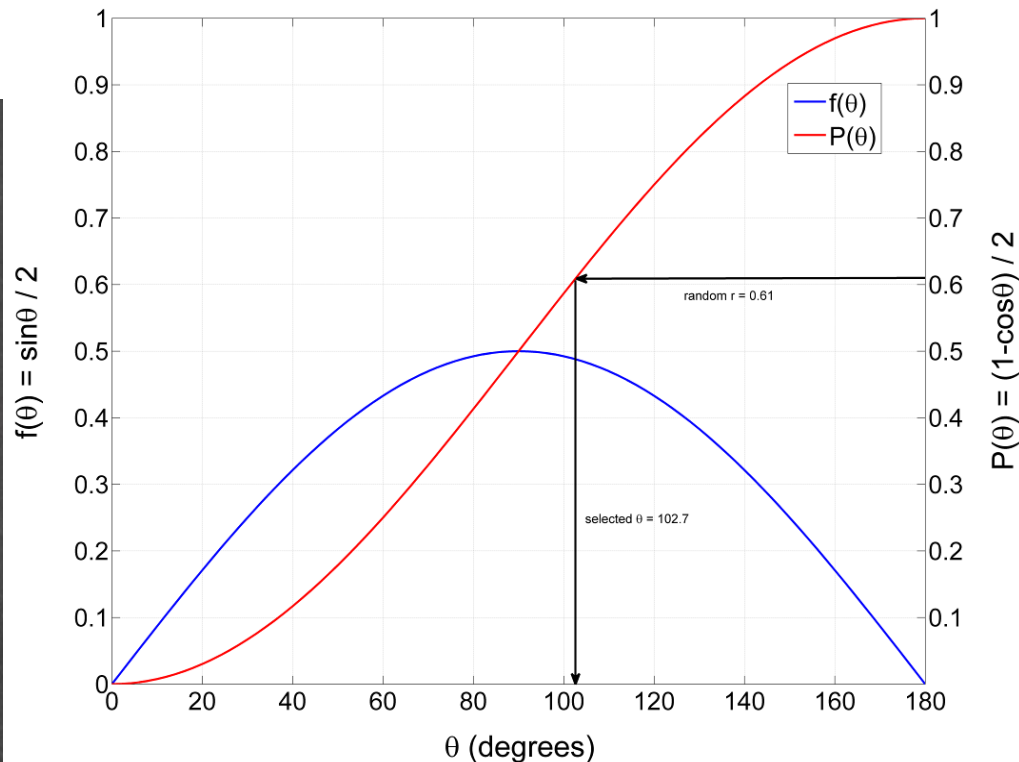
- Επιλογή κατεύθυνσης εκπεμπόμενου φωτονίου

Η εκπομπή είναι ισότροπη και σύμφωνα με την πιθανότητα εκπομπής σε στοιχείο στερεάς γωνίας $d\Omega$:

$$p(\theta, \phi)d\theta d\phi = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{\sin\theta d\theta d\phi}{4\pi}$$

$$p(\theta)d\theta = \frac{\sin\theta d\theta}{2} \quad \text{and} \quad r = P(\theta^*) = \int_0^{\theta^*} \frac{\sin\theta d\theta}{2} \Rightarrow r = \frac{1 - \cos\theta^*}{2} \Rightarrow \cos\theta^* = 1 - 2r$$

$$p(\phi)d\phi = \frac{d\phi}{2\pi} \quad \text{and} \quad r' = P(\phi^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\phi^*} d\phi \Rightarrow \phi^* = 2\pi r'$$

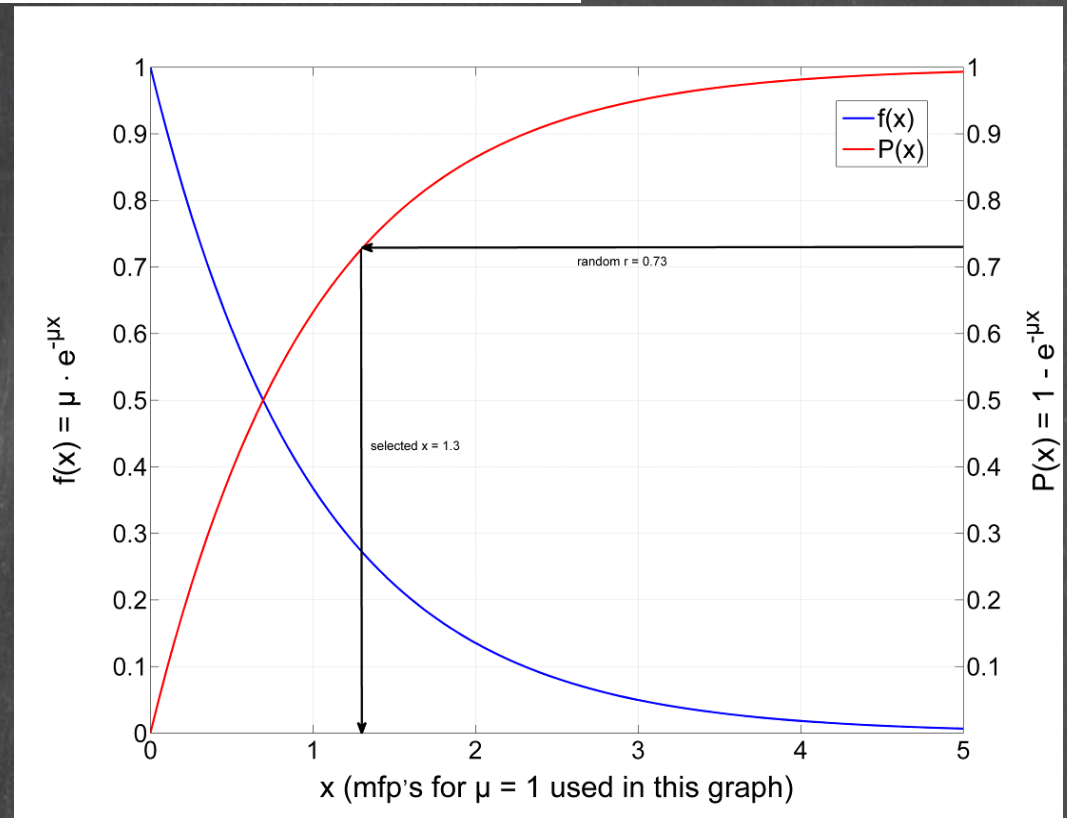


Απλά παραδείγματα για σημειακή πηγή

- Επιλογή σημείου αλληλεπίδρασης

Η πιθανότητα αλληλεπίδρασης σε dx μετά από διέλευση απόστασης x είναι $\mu \exp(-\mu x)$ οπότε:

$$r = P(x) = \int_0^{x^*} \mu \exp(-\mu x) dx \Rightarrow r = -\exp(-\mu x^*) + 1 \Rightarrow x^* = -\frac{1}{\mu} \ln(1-r) = -\frac{1}{\mu} \ln(r)$$



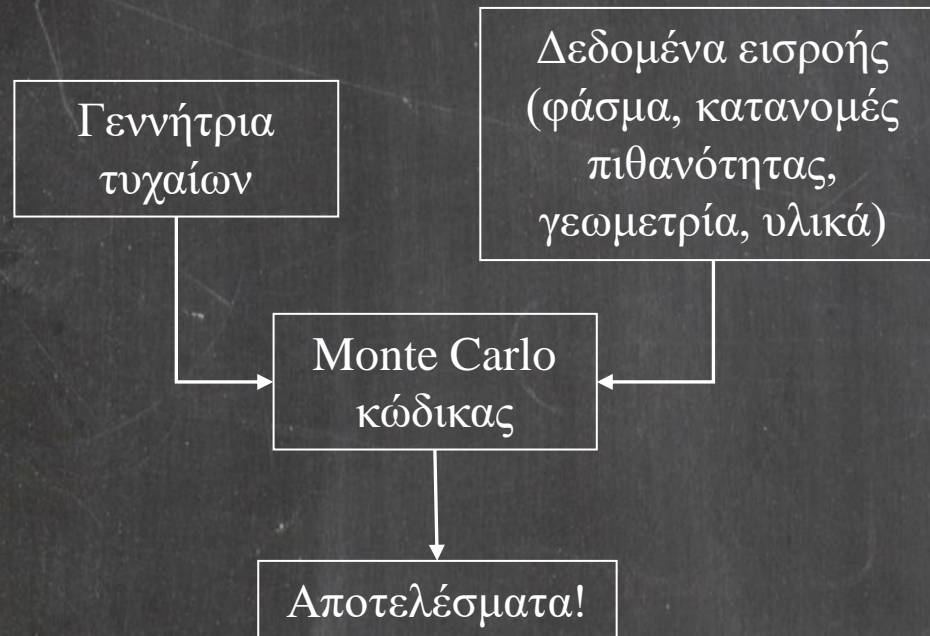
Απλά παραδείγματα για σημειακή πηγή

- Επιλογή είδους αλληλεπίδρασης

Το είδος αλληλεπίδρασης είναι διακριτή μεταβλητή με i τιμές ώστε $P_i = \mu_i / \mu_{\text{total}}$ και επιλέγεται το είδος j ώστε:

$$j = \min \left\{ j : r < \sum_{i=1}^j P_i \right\}$$

Η αρχή της δοσιμετρίας με προσομοίωση Monte Carlo



Η αρχή της δοσιμετρίας με προσομοίωση Monte Carlo

Στατιστική και ακρίβεια

$$P\left(-\frac{3b}{\sqrt{N}} < \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i - m < \frac{3b}{\sqrt{N}}\right) \approx 0.997$$

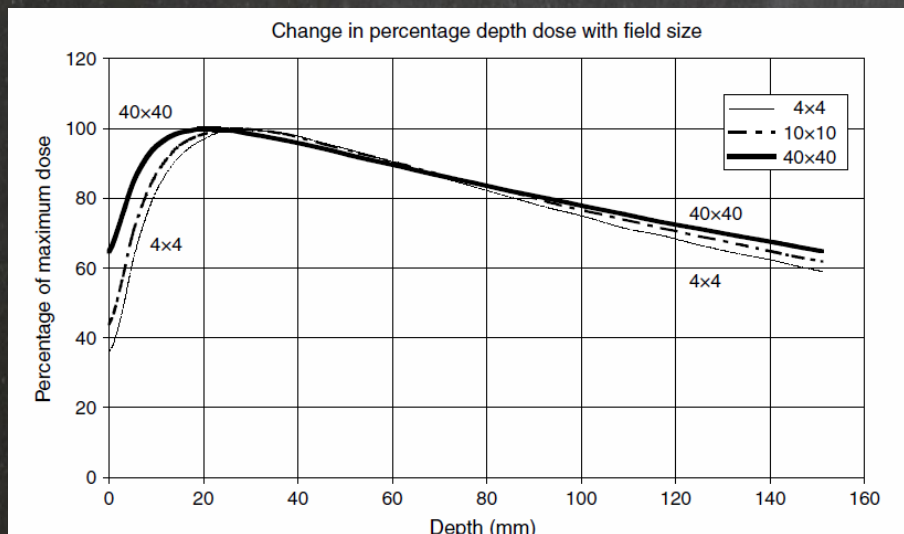
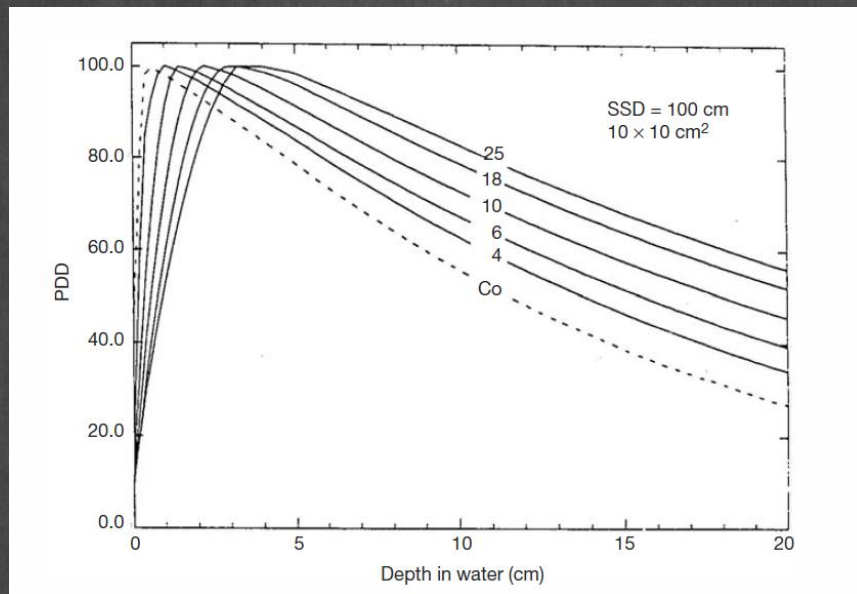
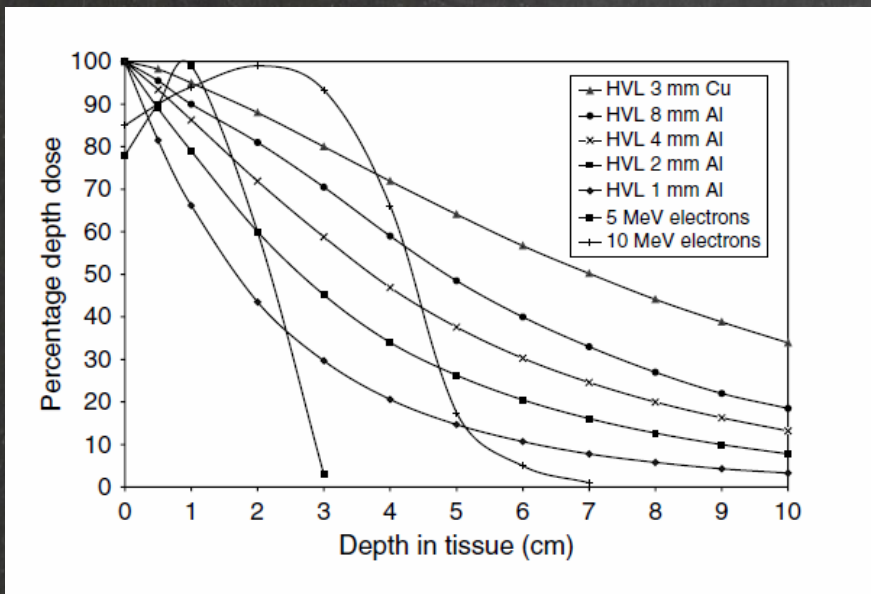
Η τυπική απόκλιση της άγνωστης ποσότητας m δεν είναι γνωστή αλλά για $N \gg$

η $\bar{k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i$ προσεγγίζει το m και η διακύμανση $Var(k) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (k_i - \bar{k})^2 \approx \bar{k}^2 - \bar{k}^2$

προσεγγίζει το b .

Συνεπώς η $\sqrt{\frac{Var(k)}{N}}$ διαμορφώνει το διάστημα εμπιστοσύνης του αποτελέσματος και θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη.

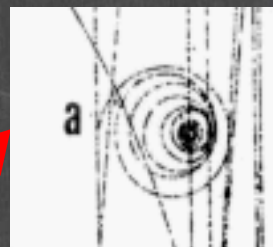
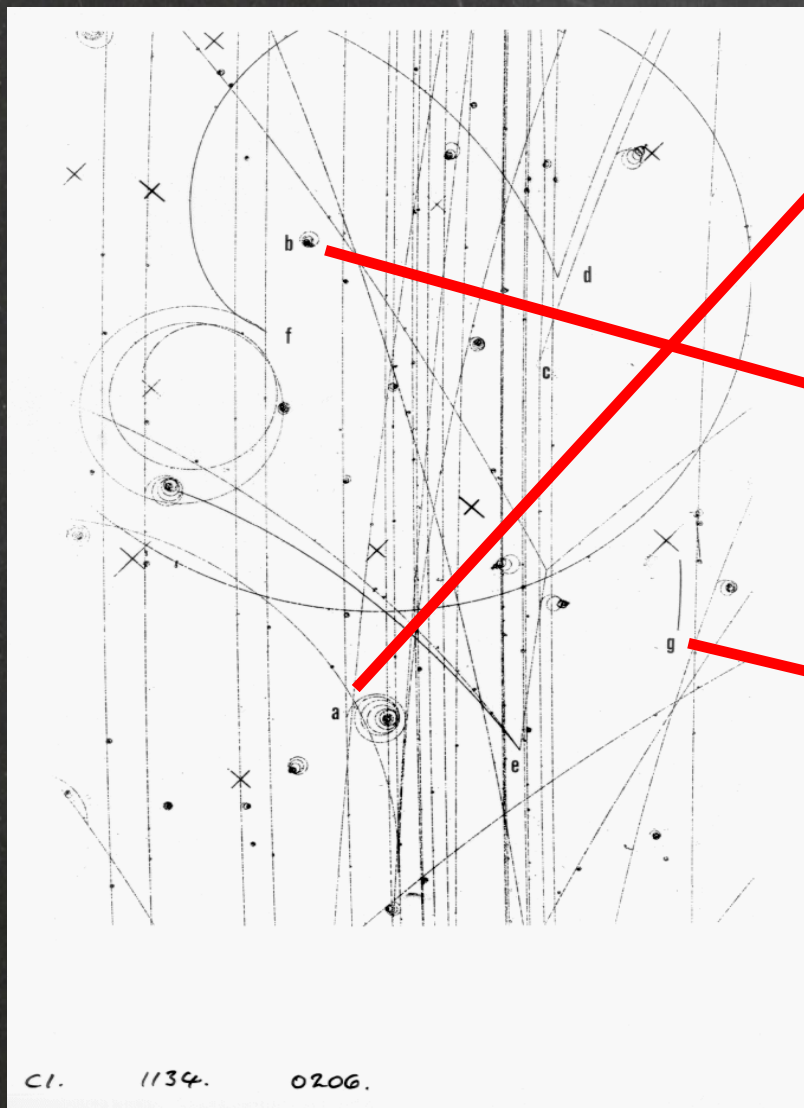
Καμπύλες δόσης – βάθους (PDD)



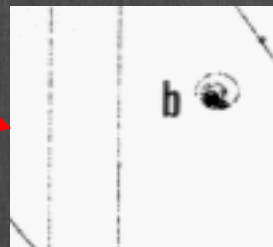
⁶⁰Co:
 $z_{max} = 5\text{mm}$

MV δέσμες:
 $z_{max} [\text{cm}] = E_{max} [\text{MeV}] / 4$

Απώλεια ενέργειας κατά την διαδρομή φορτισμένων σωματιδίων στην ύλη



a. Electron recoiling from collision with beam (K^-)



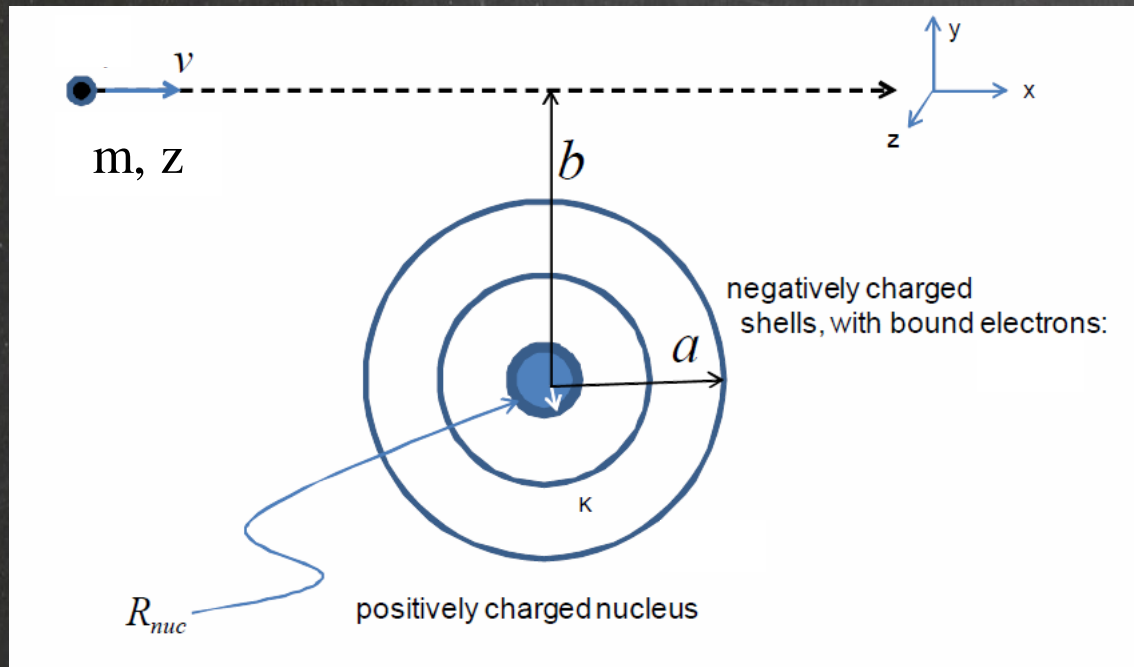
b. Electron recoiling from collision with photon



g. Interaction of a neutral particle (neutron) with a proton. The recoiling proton leaves the dark track

<http://epweb2.ph.bham.ac.uk/user/watkins/seeweb/Bubble.htm>

Απώλεια ενέργειας κατά την διαδρομή φορτισμένων σωματιδίων στην ύλη



$b \gg a$: soft collisions

Διεγέρσεις, ιονισμοί

$b \sim a$: hard collisions

Διεγέρσεις, ιονισμοί με πιθανή μεγάλη μεταφορά E

$b \sim R_{nuc}$: elastic collisions + bremsstrahlung

Εκπομπή Η/Μ ακτινοβολίας

$b < R_{nuc}$: nuclear reactions

Απώλεια ενέργειας κατά την διαδρομή φορτισμένων σωματιδίων στην ύλη

Απώλεια ενέργειας λόγω
διεγέρσεων & ιονισμών

Μεγάλος αριθμός αλλ/σεων με την κατανομή e^- του υλικού, μικρής κατά μέσο όρο απώλειας ενέργειας

Απώλεια ενέργειας λόγω
εκπομπής Η/Μ ακτινοβολίας

Μικρός αριθμός αλλ/σεων με τους πυρήνες του υλικού σημαντικής απώλειας ενέργειας

Ποσοτικοποίηση της απώλειας ενέργειας

Μαζική ανασχετική ισχύς υλικού

4.4 Mass Stopping Power

The *mass stopping power*, S/ρ , of a material, for charged particles of a given type and energy, is the quotient of dE by ρdl , where dE is the mean energy lost by the charged particles in traversing a distance dl in the material of density ρ , thus

$$\frac{S}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{dE}{dl}.$$

Unit: $\text{J m}^2 \text{kg}^{-1}$

Απώλεια ενέργειας βαρέων φορτισμένων σωματιδίων λόγω διεγέρσεων & ιονισμών

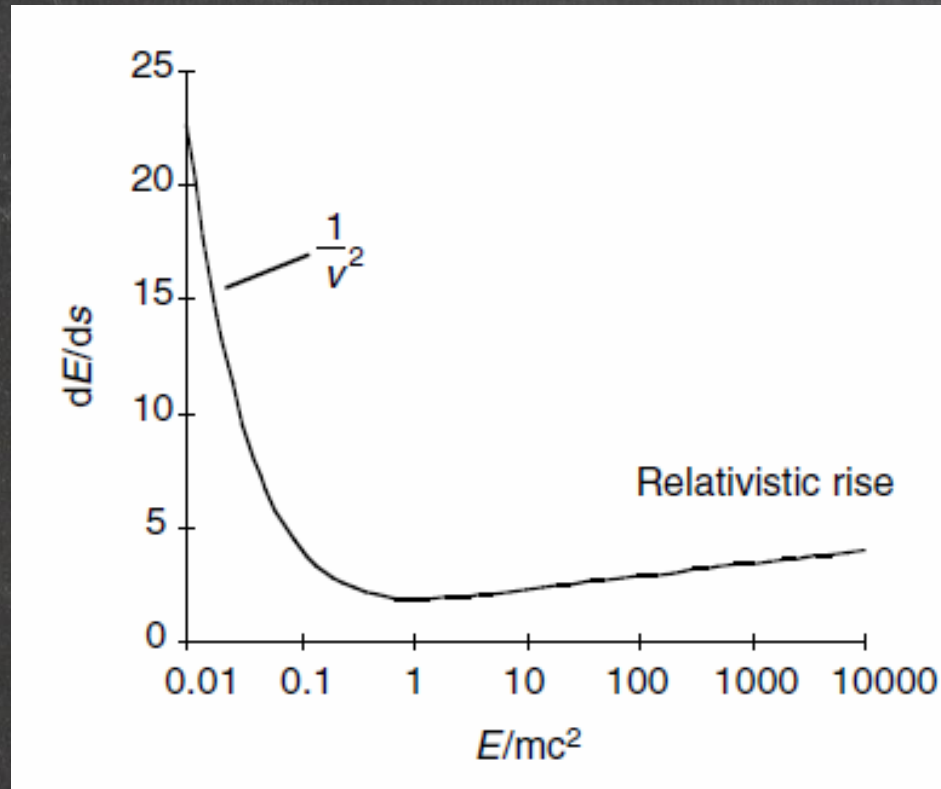
$$S_{col} = \frac{dE}{dx_{col}} = 4\pi r_0^2 \rho \frac{ZN_A}{AB} \frac{z^2 mc^2}{\beta^2} \left\{ \left[\ln \left(\frac{2mc^2 \beta^2}{I(1-\beta^2)} \right) \right] - \beta^2 - \sum_i \frac{C_i}{Z} \right\}$$

Απώλεια ενέργειας e- λόγω διεγέρσεων & ιονισμών

$$S_{col} = \frac{dE}{dx_{col}} = 2\pi r_0^2 \rho \frac{ZN_A}{AB} \frac{mc^2}{\beta^2} \left[\ln \frac{T^2 (T + 2mc^2)}{2mc^2 I^2} + F(T / mc^2) - \delta \right]$$

Από ποιους παράγοντες εξαρτάται η απώλεια ενέργειας ανά μονάδα διαδρομής ή ανασχετική ισχύς ενός υλικού ???

$1/\beta^2$ και T

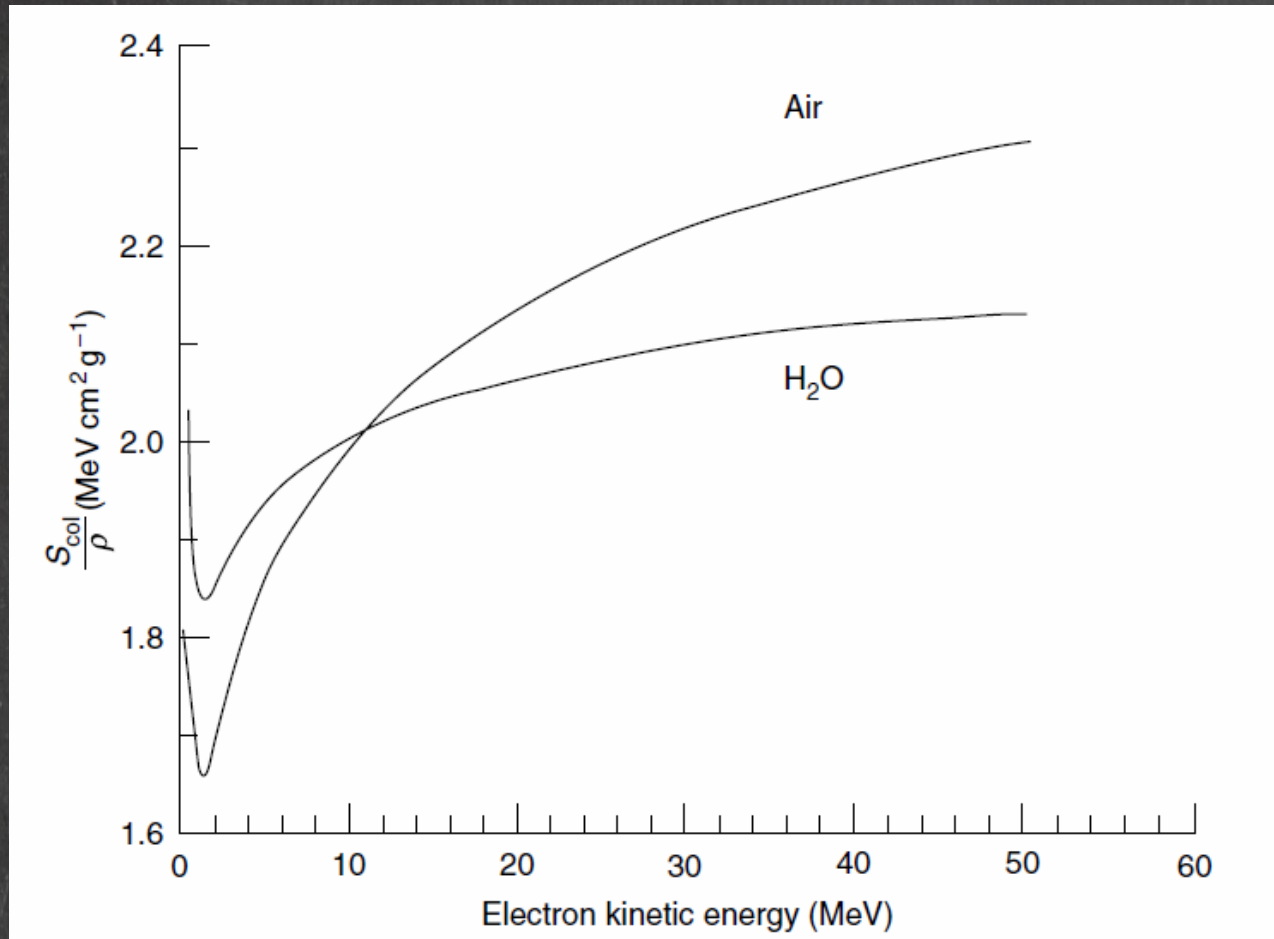


Πυκνότητα, $\langle Z/A \rangle$ και μέση ενέργεια διέγερσης I

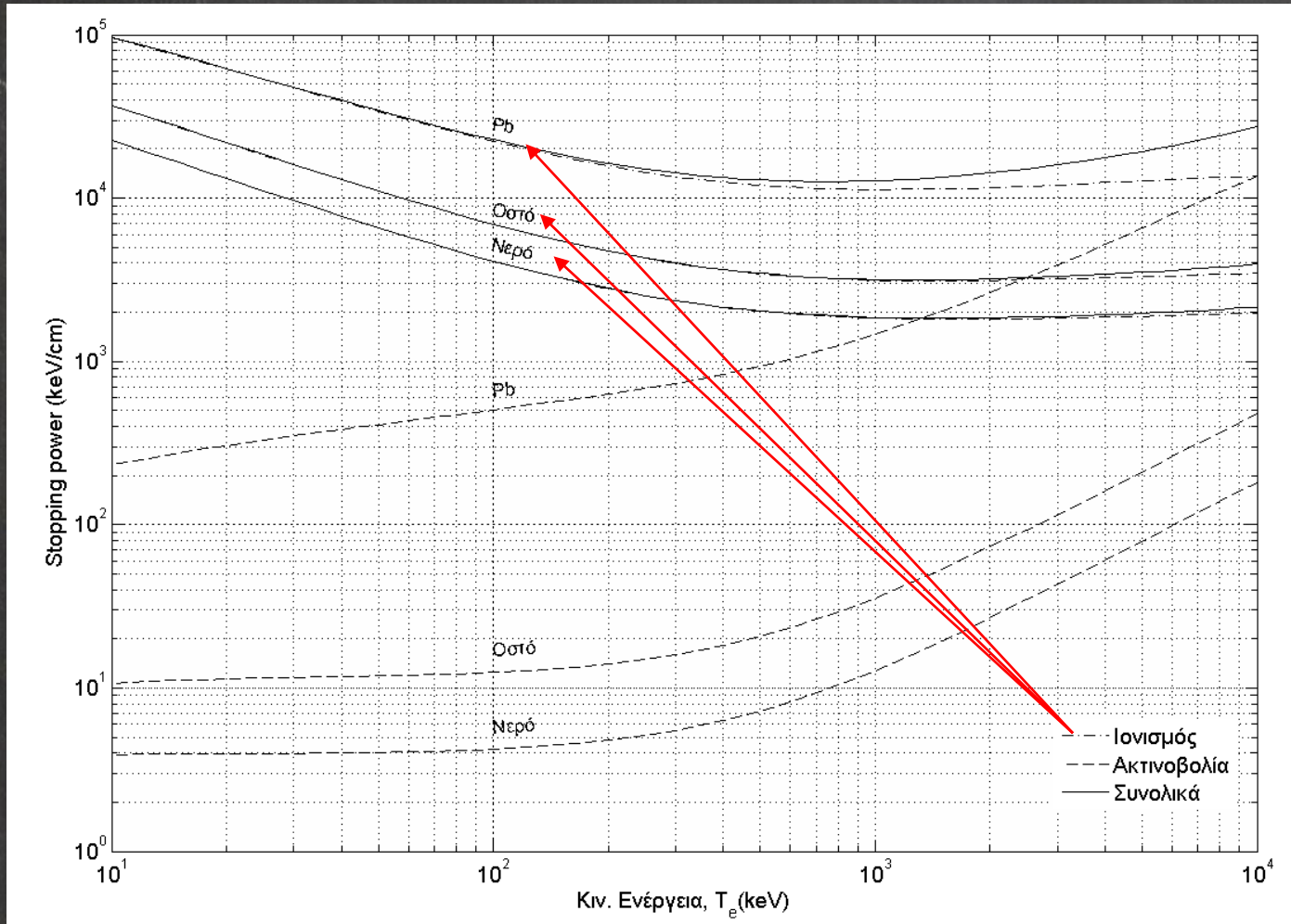
Mean Excitation Energies, I , and Other Quantities Relevant to the Evaluation of the Collision Stopping Power of Selected Human Tissues and Other Materials of Dosimetric Interest

Material	I (eV)	$\langle Z/A \rangle$	Density (g cm ⁻³)
Adipose tissue (ICRP)	63.2	0.558468	0.920
Air (dry)	85.7	0.499190	1.205×10^{-3}
Bone, compact (ICRU)	91.9	0.530103	1.850
Bone, cortical (ICRP)	106.4	0.521299	1.850
Ferrous-sulphate dosimeter solution	76.3	0.553282	1.024
Lithium fluoride	94.0	0.462617	2.635
Muscle, skeletal (ICRP)	75.3	0.549378	1.040
Muscle, striated (ICRU)	74.7	0.550051	1.040
Photographic emulsion	331.0	0.454532	3.815
PMMA (lucite, perspex)	74.0	0.539369	1.190
Polystyrene	68.7	0.537680	1.060
Water (liquid)	75.0	0.555087	1.000

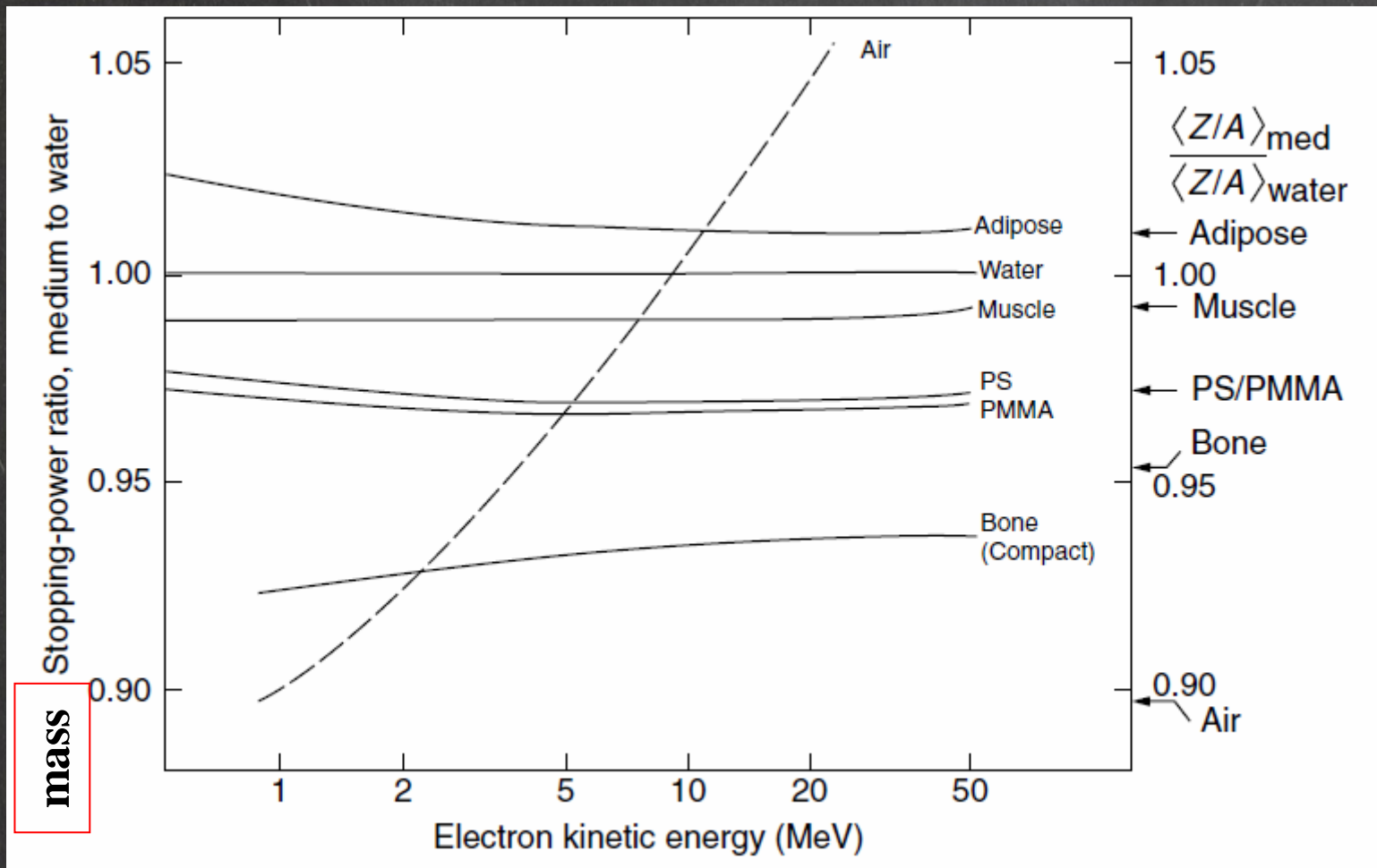
Διόρθωση πυκνότητας ή πόλωσης, δ για σχετικιστικές ταχύτητες



Συνολικά: Απώλεια ενέργειας e^- λόγω διεγέρσεων & ιονισμών



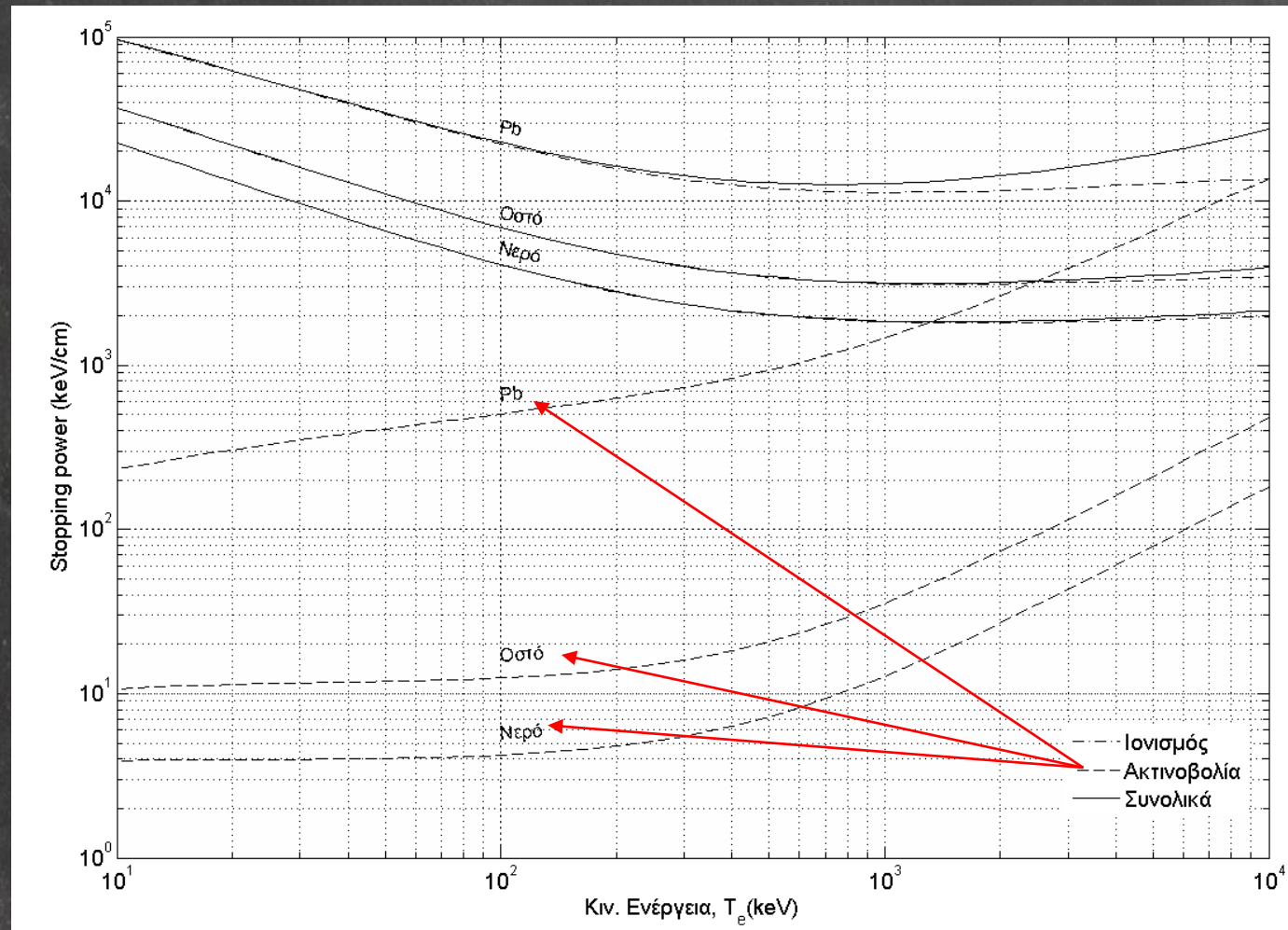
Και για βιολογικά υλικά: Απώλεια ενέργειας e⁻ λόγω διεγέρσεων & ιονισμών



Απώλεια ενέργειας φορτισμένων σωματιδίων λόγω εκπομπής ακτινοβολίας

Από ποιους παράγοντες εξαρτάται η απώλεια ενέργειας ανά μονάδα διαδρομής ή ανασχετική ισχύς ενός υλικού ???

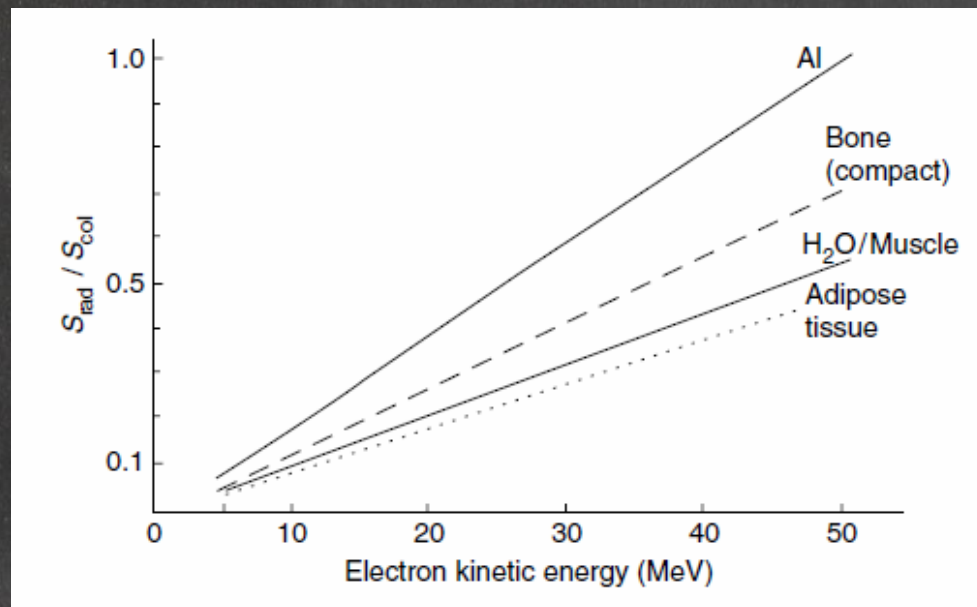
$$\frac{dE}{dx_{rad}} \propto \rho \frac{N_A}{AB}, \frac{Z^2}{m^2}, E$$



Κλάσμα ακτινοβολίας (radiation Yield), $Y(E_0)$

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας των φορτισμένων σωματιδίων, E_0 , που θα μετατραπεί σε ακτινοβολία πέδησης:

$$Y(E_0) = \frac{1}{E_0} \int_0^{E_0} \frac{S_{\text{rad}}(E)}{S_{\text{col}}(E) + S_{\text{rad}}(E)} dE$$



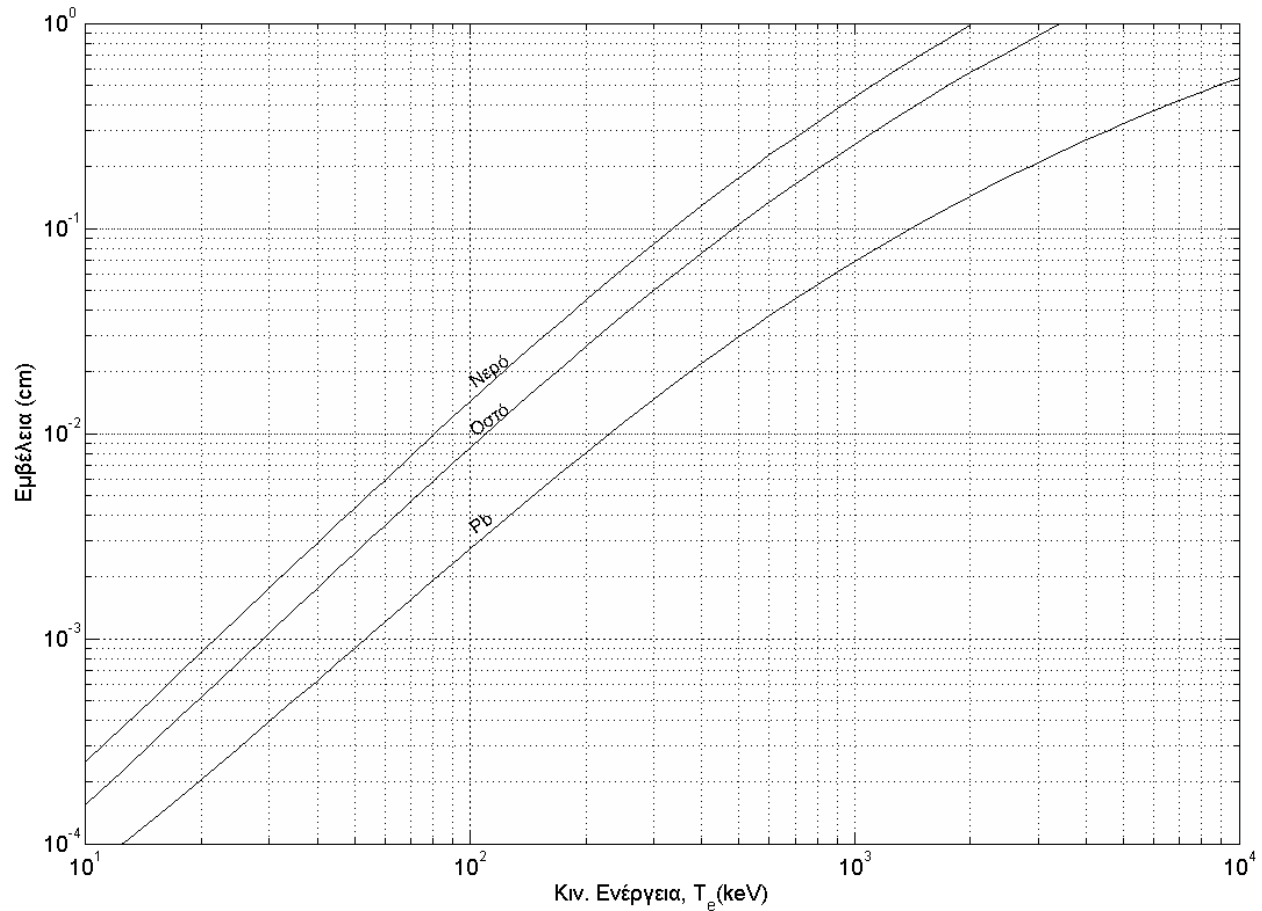
Continuous Slowing Down Approximation (CSDA) και εμβέλεια

Αν υποθέσουμε ότι όλα τα φορτισμένα σωματίδια μιας δέσμης θα χάνουν ανά μονάδα διαδρομής το ίδιο ποσό ενέργειας, ίσο με την ανασχετική ισχύ του υλικού για την εκάστοτε ενέργειά τους, η εμβέλειά τους, r_0 , θα δίνεται ως:

$$r_0 = \int_0^{E_0} \frac{1}{S_{\text{tot}}(E)} dE$$

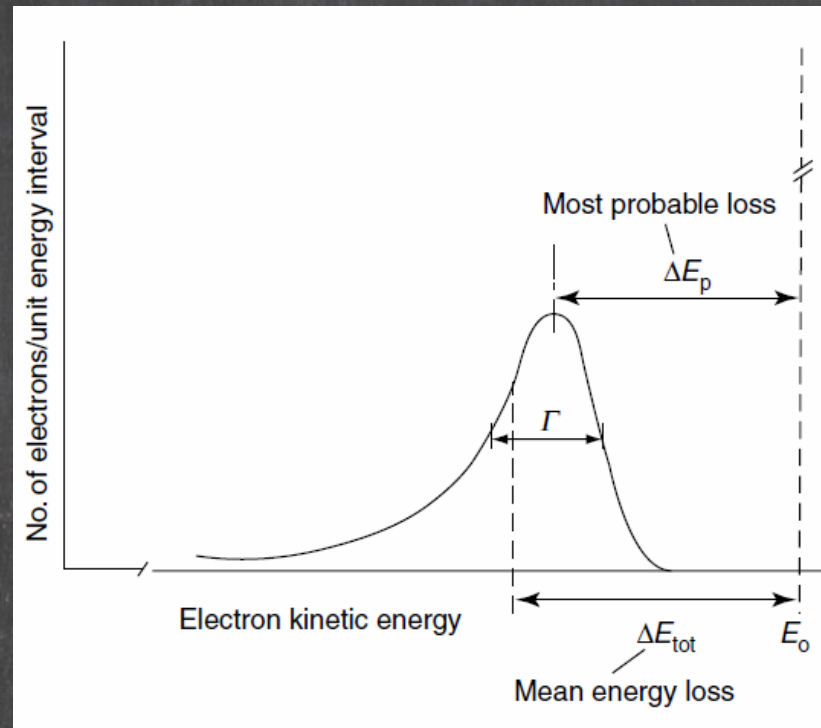
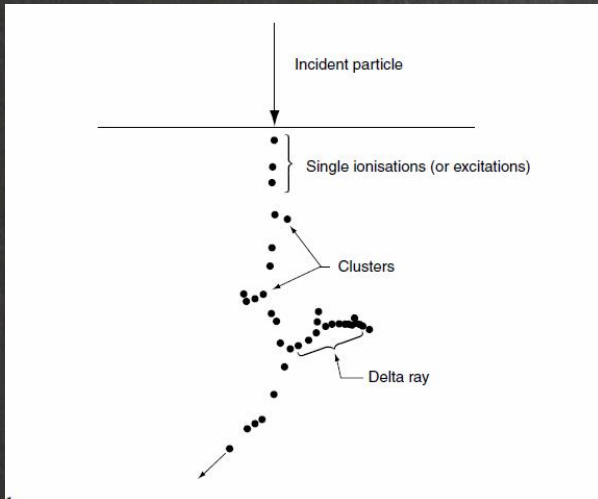
Πρακτικά η εμβέλεια των φορτισμένων σωματιδίων μπορεί να διαφοροποιείται λόγω διασποράς στην απώλεια ενέργειας (**energy straggling**) και της σχετικής σημασίας των **ελαστικών σκεδάσεων**

Εμβέλεια ηλεκτρονίων σε διάφορα υλικά



Energy straggling ...

Το εύρος της κατανομής απώλειας ενέργειας των σωματιδίων επηρεάζεται από τις μικρής πιθανότητας αλληλεπιδράσεις με μεγάλη απώλεια ενέργειας (πέδηση, ιονισμοί με μεγάλη μεταφορά ενέργειας)



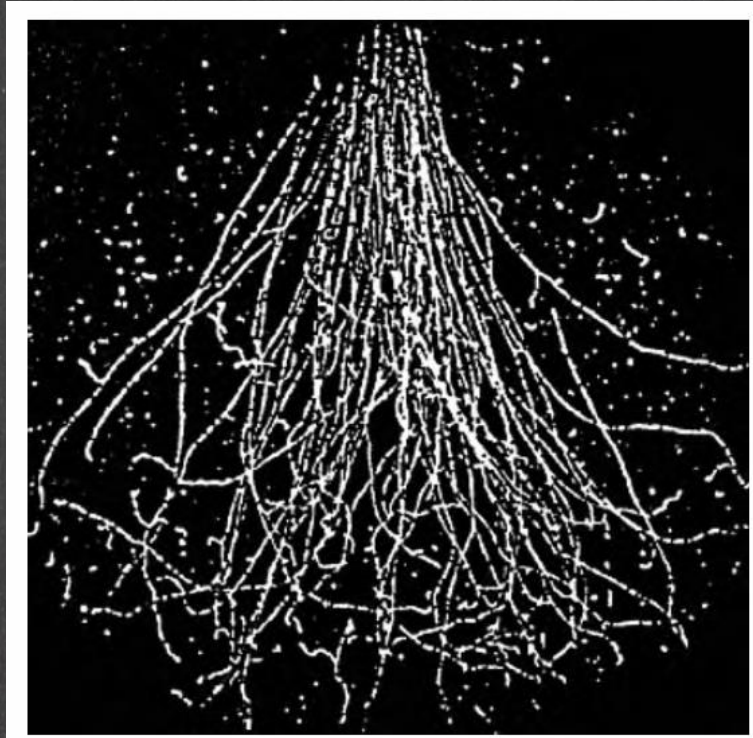
Δοσιμετρία φορτισμένων σωματιδίων

$$D_m \stackrel{\delta\text{-eqm}}{=} \Phi \left(\frac{S_{\text{col}}}{\rho} \right)_m$$

$$D_m \stackrel{\delta\text{-eqm}}{=} \int_0^{E_{\text{max}}} \Phi_E \left(\frac{S_{\text{col}}(E)}{\rho} \right)_m dE$$

Ελαστικές σκεδάσεις

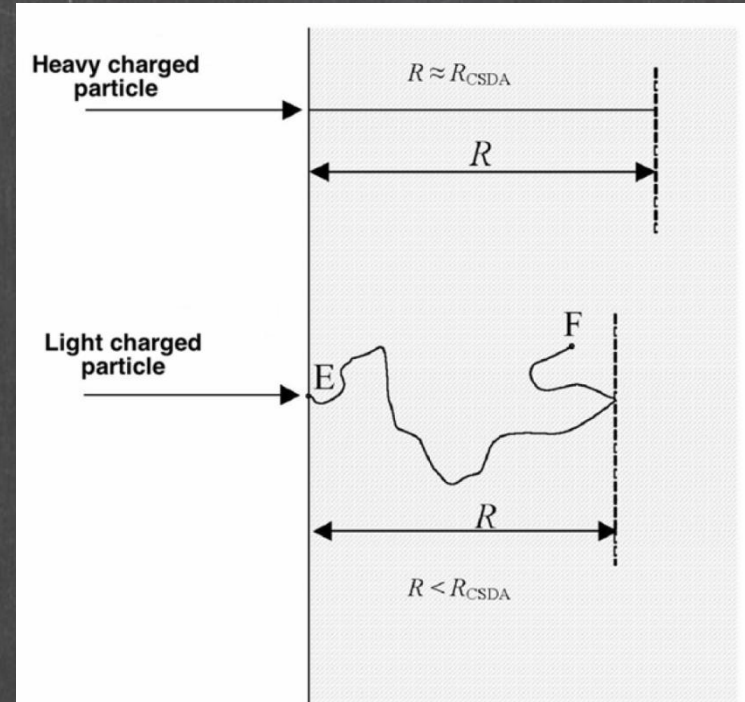
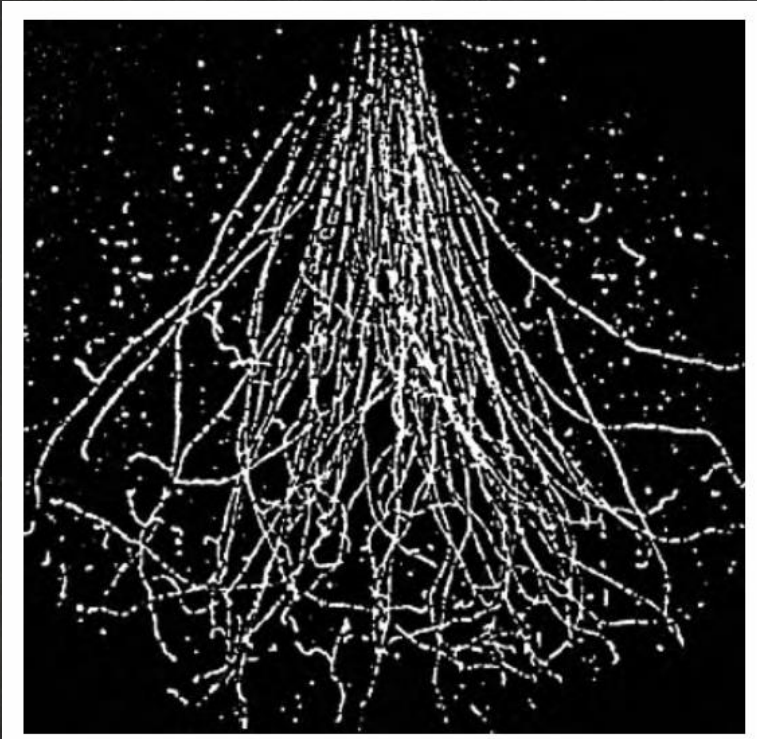
- Σημαντικές για ελαφρά φορτισμένα σωματίδια (e)
- Η μέση γωνία σκέδασης αυξάνει με το Z και τη μείωση της ενέργειας.



e^- 9.3 MeV σε σε θάλαμο
φουσαλίδων προπανίου

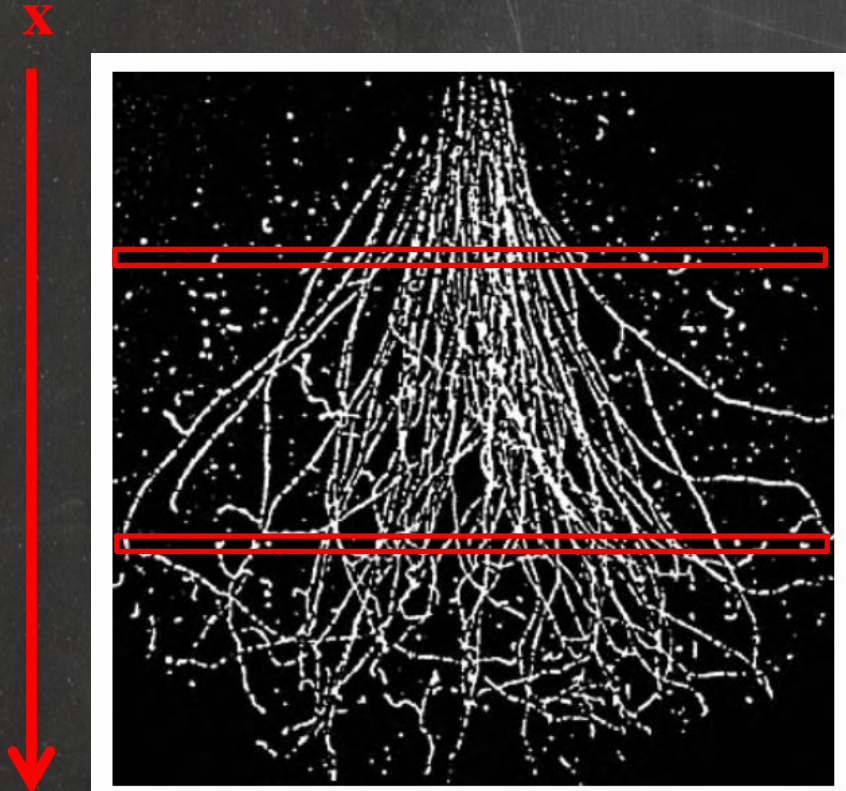
Η σημασία των ελαστικών σκεδάσεων

Το μήκος τροχιάς, το βάθος διείσδυσης και η εμβέλεια (CSDA range) μπορεί να διαφέρουν ...



e^- 9.3 MeV σε σε θάλαμο
φουσαλίδων προπανίου

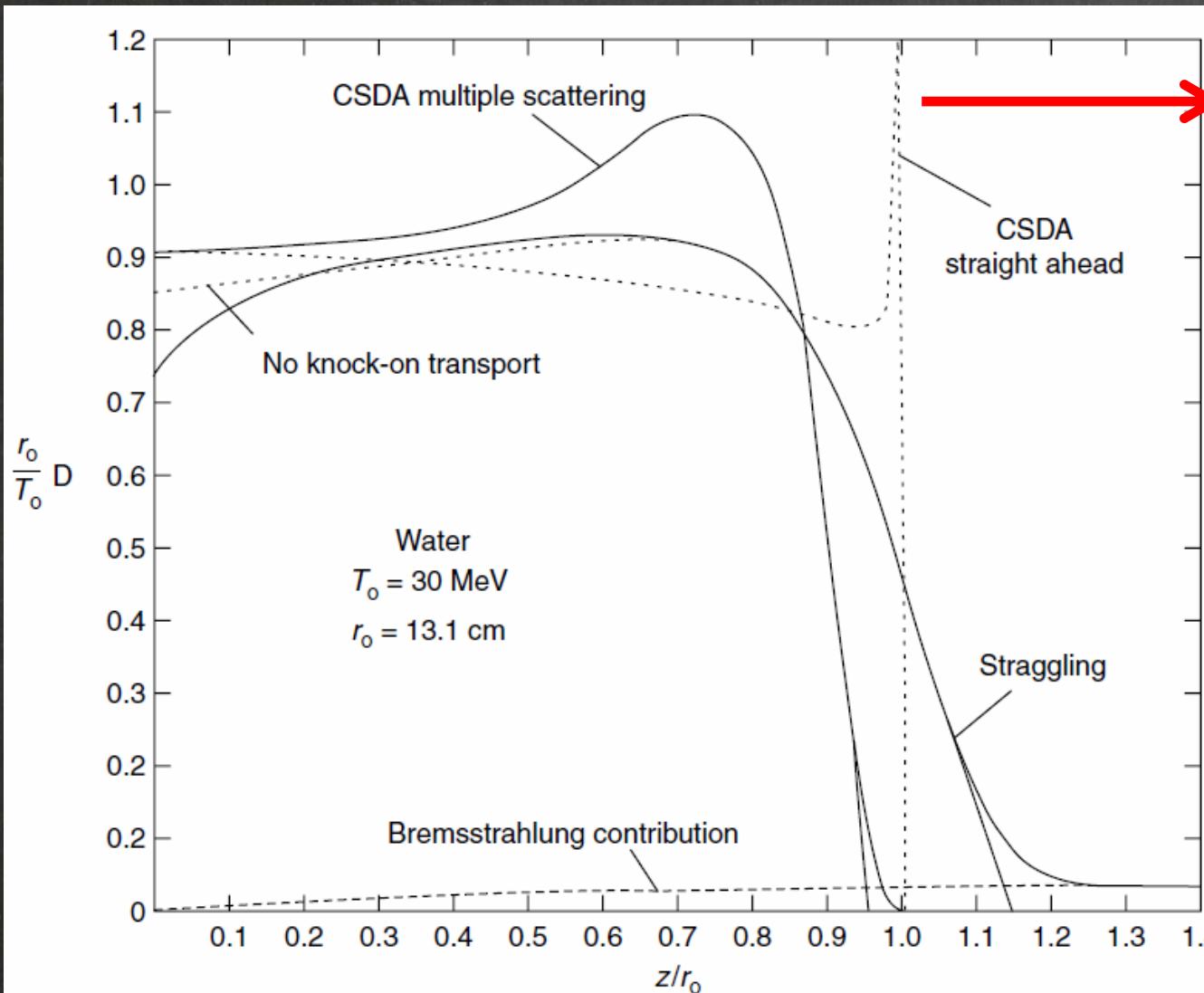
Η σημασία των ελαστικών σκεδάσεων



Για ευρείες δέσμες η καμπύλη δόσης-βάθους αυξάνει μέχρι η μείωση της ροής να οδηγήσει στη ραγδαία μείωση της: η δόση στη στοιχειώδη μάζα μεταξύ x και $x+dx$ θα είναι μικρότερη σε βάθος x_1 από ότι σε x_2 για $x_1 < x_2 < 0,7$ της εμβέλειας

e^- 9.3 MeV σε σε θάλαμο
φουσαλίδων προπανίου

Καμπύλη δόσης-βάθους φορτισμένων σωματιδίων

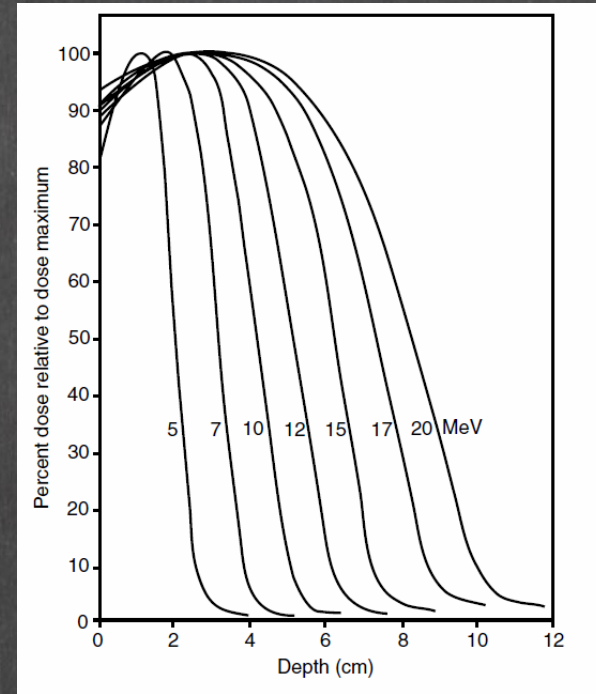
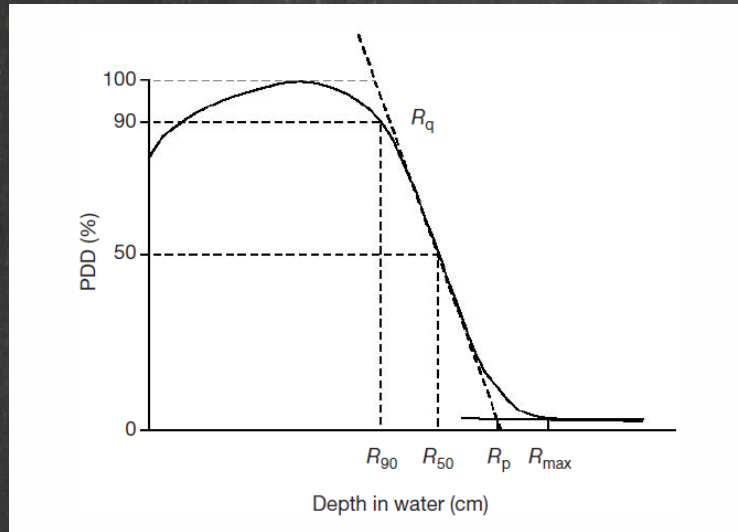


Καμπύλη Bragg

Παρατηρείται μόνο για βαρέα φορτισμένα σωματίδια

e^- 30 MeV σε νερό

Καμπύλες δόσης-βάθους e^-



$$\{2,3,4,5\} \times E_0 \text{ [MeV]} \\ = \\ \{Z_{100\%}, Z_{90\%}, Z_{50\%}, R_p\} \text{ [mm]}$$