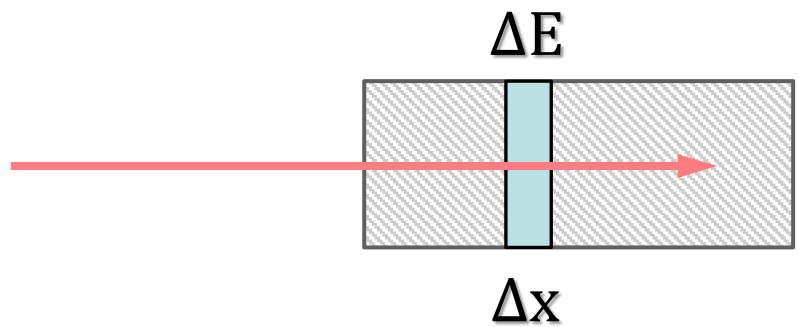
ΙΑΤΡΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

Π. Παπαγιάννης & Ε. Στυλιάρης
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
2019 - 2020

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΥΛΗ

- Γραμμική Ανασχετική Ισχύς (Linear Stopping Power)
  - Απώλεια Ενέργειας Φορτισμένου Σωματιδίου
  - Ο τύπος του Bethe
  - Η καμπύλη Bragg
- Εμβέλεια Φορτισμένου Σωματιδίου
  - Ορισμός της Εμβέλειας R
  - Συσχετισμός του R με το Z και την Ενέργεια
  - Απομένουσα Ενέργεια μετά από Διέλευση Υλικού
- Παραμετροποίηση της Ανασχετικής Ισχύος για διάφορα Υλικά

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ



Το φορτισμένο σωματίδιο χάνει ενέργεια ΔΕ στο διάστημα Δx

Ορισμός της γραμμικής ανασχετικής ισχύος: $\boxed{S = -\frac{dE}{dx}}$

Linear Stopping Power S

$$S = S(z, E, Z)$$

Το S εξαρτάται κυρίως από:

- Τον ατομικό αριθμό z και την ενέργεια Ε του εισερχόμενου σωματιδίου
- Τον ατομικό αριθμό Z του στόχου

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

Ο τύπος του Bethe για το S

$$S = -\frac{dE}{dx} = 4\pi \frac{e^4 z^2}{m_e v^2} \cdot N \cdot B$$

όπου

$$B = Z \cdot \left[\ln \frac{2 m_e v^2}{I} - \ln\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

m_e : μάζα ηλεκτρονίου
z : ατομικός αριθμός εισερχόμενου σωματιδίου
v : ταχύτητα εισερχόμενου σωματιδίου
Z : ατομικός αριθμός του στόχου απορροφητή
N : αριθμός ατόμων ανά μονάδα όγκου στο υλικό του στόχου
I : μέσο δυναμικό διέγερσης και ιονισμού

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

Εναλλακτική μορφή του τύπου του Bethe

$$S = -\frac{dE}{dx} = 4\pi \frac{e^2 Q^2}{m_e \beta^2 c^2} \cdot N \cdot B$$

όπου

$$B = Z \cdot \left[\ln\left(\frac{2 m_e \beta^2 c^2}{I} \cdot \gamma^2 \right) - \beta^2 \right]$$

$$\beta = \frac{v}{c}\ , \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

m_e : μάζα ηλεκτρονίου
Q : φορτίο εισερχόμενου σωματιδίου (= ze)
β : ταχύτητα εισερχόμενου σωματιδίου (= v/c)
Z : ατομικός αριθμός του στόχου απορροφητή
N : αριθμός ατόμων ανά μονάδα όγκου στο υλικό του στόχου
I : μέσο δυναμικό διέγερσης και ιονισμού

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

Ατομική πυκνότητα N

Όπως ορίσθηκε στις προηγούμενες εκφράσεις το N αποδίδει το κλάσμα

N = άτομα / όγκος

Δοσμένης της πυκνότητας του υλικού, το N είναι ισοδύναμο με:

$$N = \frac{\text{atoms}}{\text{volume}} = \frac{\frac{m}{MB} \cdot N_{Avog}}{V} = \frac{m}{V} \cdot \frac{1}{MB} \cdot N_{Avog} = \frac{\rho}{MB} \cdot N_{Avog}$$

$$N_{Avog} = 6.023 \times 10^{23}$$

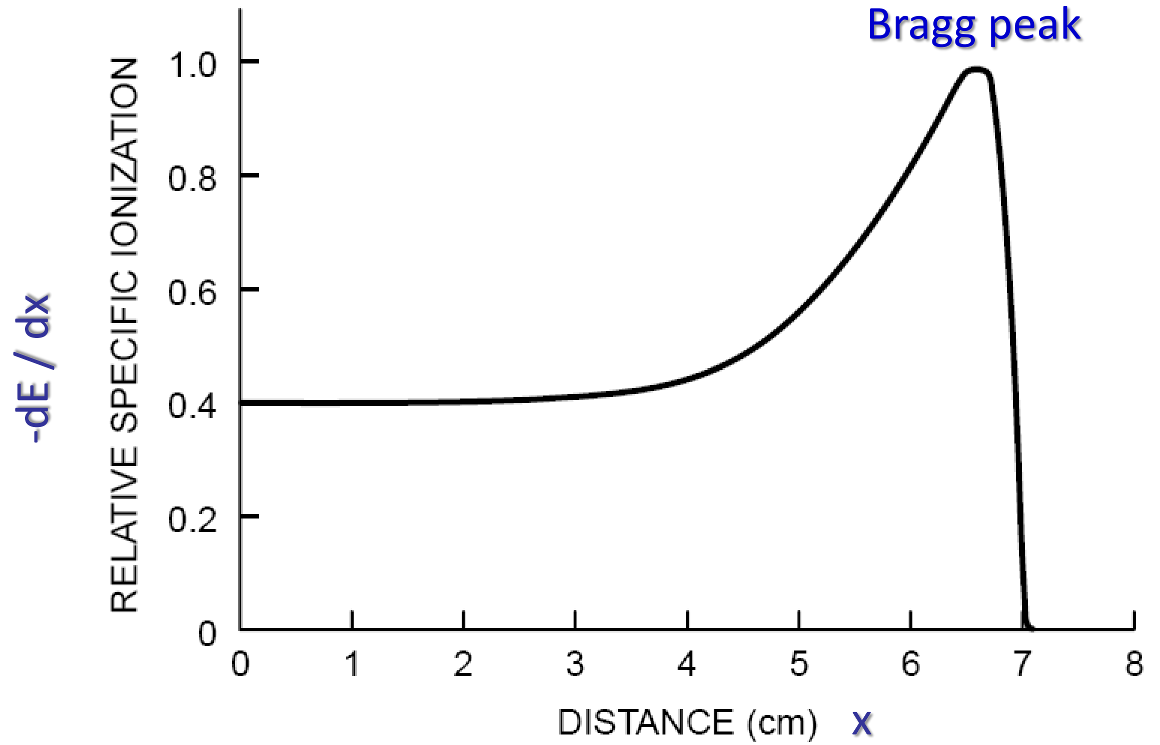
Δυναμικό Διέγερσης / Ιονισμού I

Αντιπροσωπεύει την μέση απαιτούμενη ενέργεια για τον ιονισμό ενός ατόμου στον απορροφητή (προσεγγιστικά αριθμητικά **$I \simeq 10 \cdot Z$** για μεγάλα Z).

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

Καμπύλη Bragg

Η καμπύλη που δίνει την εκάστοτε τιμή της ανασχετικής ισχύος **-dE/dx** συναρτήσει της διαδρομής **x** φορτισμένου σωματίου κατά μήκος της διαδρομής του στον στόχο / απορροφητή.

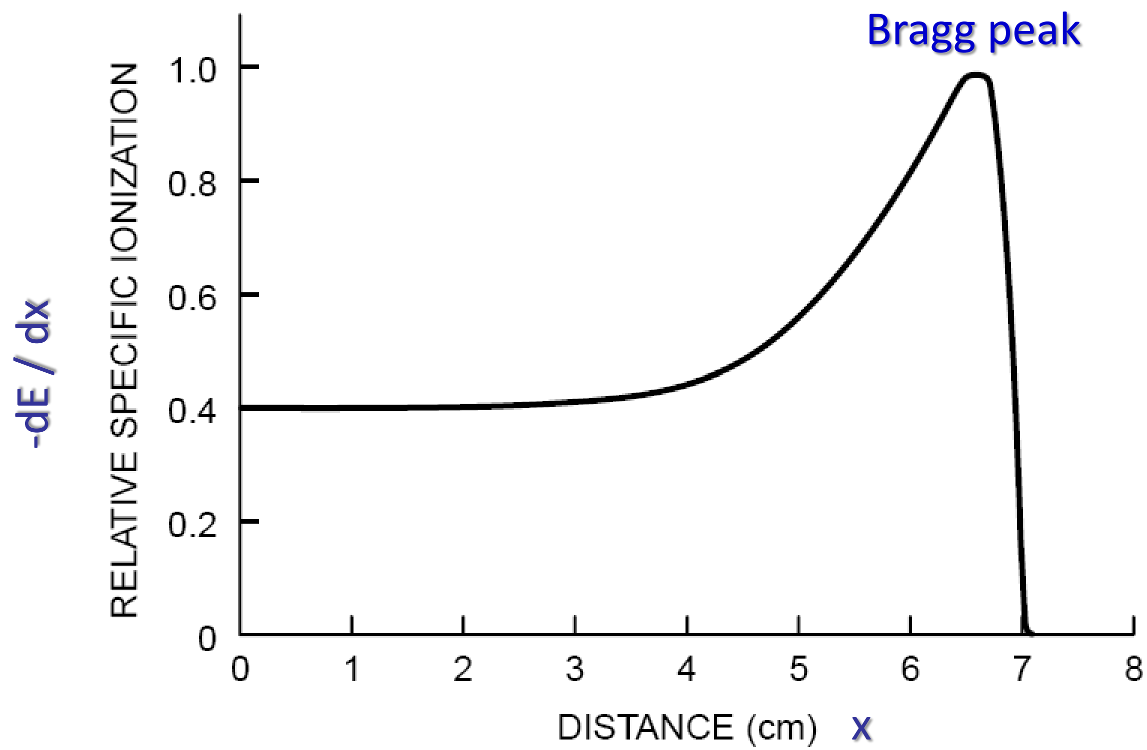


Σωματίδια α (4He) ενέργειας 7.7 MeV στον αέρα. Είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα το μέγιστο που παρουσιάζει η απορρόφηση προς το τέλος της διαδρομής (Bragg peak), όπου η ενέργεια του ιοντίζοντος σωματιδίου τείνει να μηδενισθεί.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

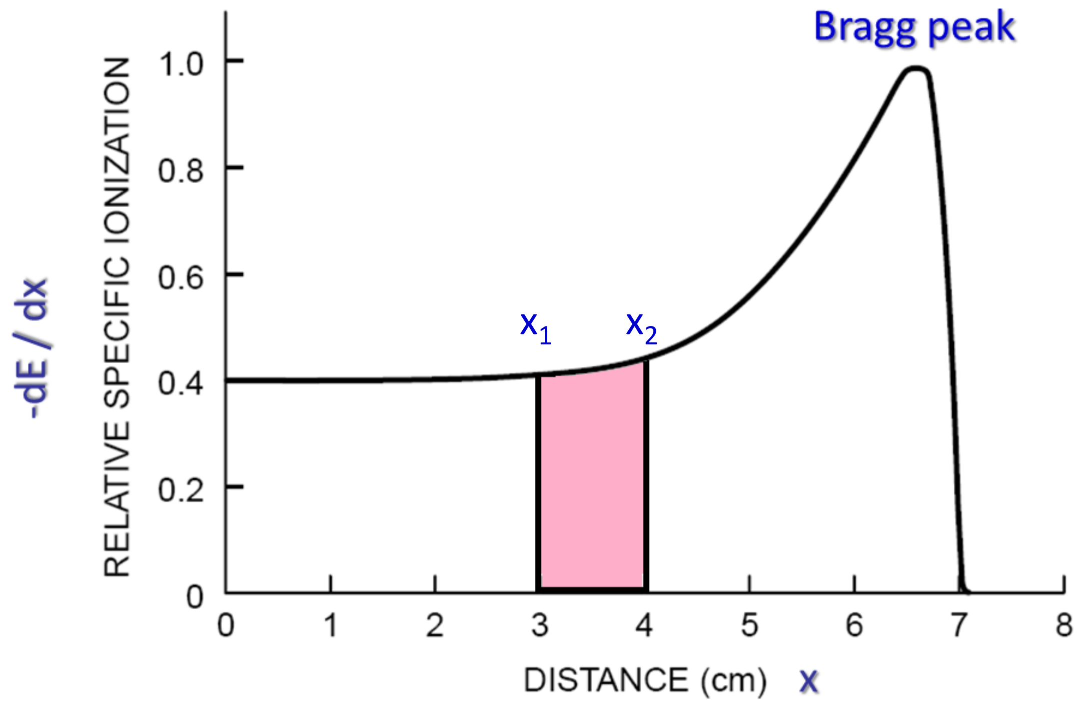
Χαρακτηριστικά της καμπύλης Bragg

- Η ενέργεια του ιοντίζοντος σωματίου **ελαττώνεται** κατά μήκος της διαδρομής.
- Κατά συνέπεια, η ανασχετική ισχύς $S(E)=-dE/dx$ (ως συνάρτηση της ενέργειας) **αυξάνει**, έως ότου το σωμάτιο απορροφηθεί πλήρως.
- Προς το **τέλος** της διαδρομής, όπου η ταχύτητα (ενέργεια) του ιοντίζοντος σωματιδίου είναι ελάχιστη, γίνεται η **μεγαλύτερη εναπόθεση ενέργειας** στον απορροφητή (**Bragg peak**).



ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

Χαρακτηριστικά της καμπύλης Bragg

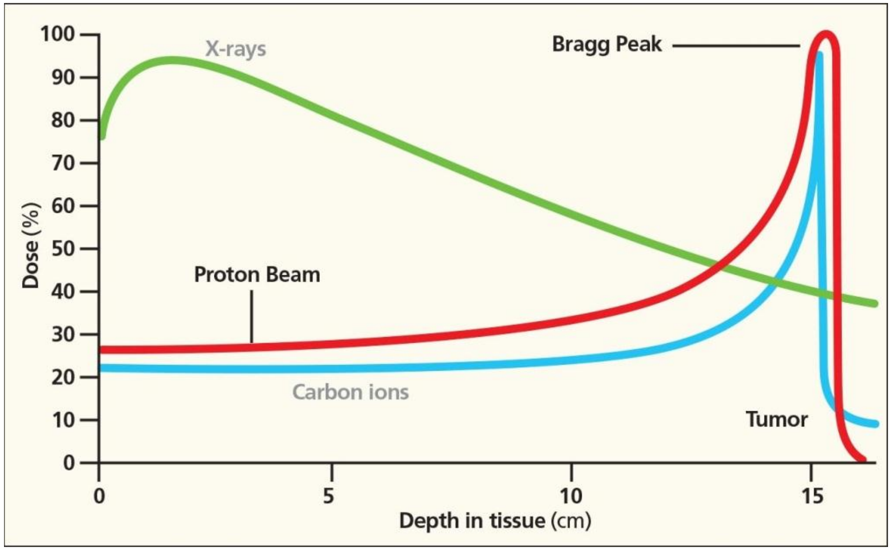


$$E_{1\to 2} = \int_1^2 -\frac{dE}{dx}\,dx$$

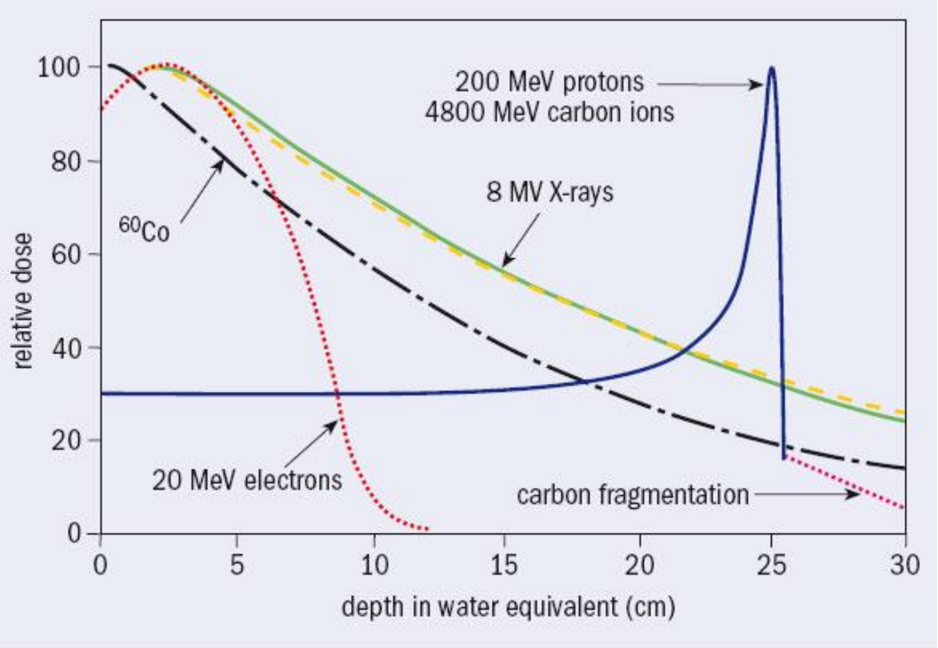
Η αρχική ενέργεια E_0 του ιοντίζοντος σωματίου ταυτίζεται με το εμβαδόν της καμπύλης Bragg.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

Χαρακτηριστικά της καμπύλης Bragg



Σύγκριση της καμπύλης Bragg για ισοδύναμα ιόντα ^{12}C (4800MeV) & πρωτόνια p (200MeV) με την αντίστοιχη απορρόφηση ηλεκτρονίων και φωτονίων.



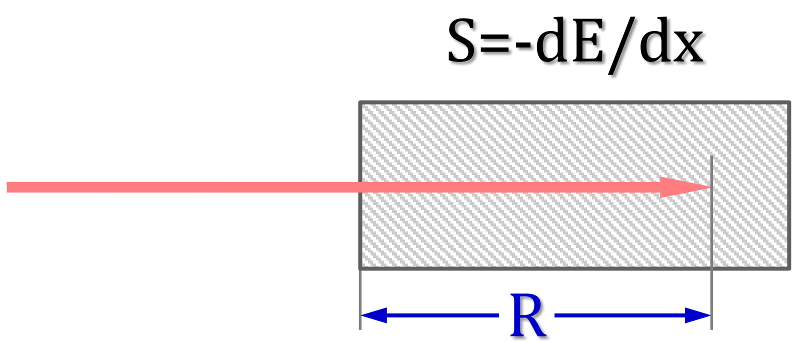
Σύγκριση της καμπύλης Bragg ισοδύναμης ενεργειακά (ίδια εμβέλεια) δέσμης πρωτονίων και ιόντων άνθρακα ^{12}C.

Διαφορετική συμπεριφορά της καμπύλης Bragg για διαφορετικά ιόντα ισοδύναμης ενέργειας και φορτίου.

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Ορισμός της Εμβέλειας R

Φορτισμένο σωματίδιο αρχικής ενέργειας E_0 υπεισέρχεται σε σώμα ικανών διαστάσεων για να το σταματήσει (να το απορροφήσει πλήρως).



$$R = \int_0^R dx = \int_{E_0}^0 \frac{dx}{dE} dE = \int_{E_0}^0 \frac{1}{dE/dx} dE = \int_0^{E_0} \frac{dE}{-dE/dx}$$

$$\boxed{R = \int_0^{E_0} \frac{dE}{S(E)} = \int_0^{E_0} \frac{dE}{-dE/dx}}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Μονάδες μέτρησης της Εμβέλειας R

[R] = cm ή [R] = gr / cm^2 για συγκεκριμένο υλικό γνωστής πυκνότητας ρ.

Παράδειγμα: Για ενέργειες μερικών MeV, τα σωματίδια α (^{4}He) στον αέρα έχουν εμβέλεια που δίνεται από τη σχέση

$$R\,[\mathrm{cm}] = 0.318 \cdot (E[\mathrm{MeV}])^{3/2}$$

Τι πάχος αέρα διανύουν α-σωματίδια ενέργειας E=5 MeV και E=10 MeV?

Απάντηση: Η ζητούμενη εμβέλεια για E=5MeV υπολογίζεται:

$$R\,[\mathrm{cm}] = 0.318 \cdot 5^{3/2} = 3.56\ \mathrm{cm} \Rightarrow \mathbf{R = 3.56\ cm}$$

ενώ για E=10MeV υπολογίζεται:

$$R\,[\mathrm{cm}] = 0.318 \cdot 10^{3/2} = 3.56\ \mathrm{cm} \Rightarrow \mathbf{R = 10.1\ cm}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Μονάδες μέτρησης της Εμβέλειας R

[R] = cm ή **[R] = gr / cm^2** για συγκεκριμένο υλικό γνωστής πυκνότητας ρ.

Παράδειγμα: Για χαμηλής ενέργειας ηλεκτρόνια, η εμβέλεια των δίνεται από τη σχέση

$$R\,[gr/cm^2] = 0.537 \cdot E[MeV] - 0.16$$

Ποια η μέγιστη ενέργεια ηλεκτρονίων που μπορεί να σταματήσει ένα φύλλο αλουμινίου (ρ=2.7gr/cm^3) πάχους 0.935 cm?

Απάντηση: Για την μέγιστη ζητούμενη ενέργεια, η εμβέλεια των ηλεκτρονίων (σε μονάδες gr/cm^2) πρέπει να είναι:

$$R\,[gr/cm^2] = \rho \cdot x = 2.7\ gr/cm^3 \cdot 0.935\ cm = 2.52\ gr/cm^2$$

Με βάση την παραπάνω δοθείσα σχέση:

$$R\,[gr/cm^2] = 0.537 \cdot E[MeV] - 0.16 \;\Rightarrow\; E[MeV] = (R[gr/cm^2]+0.16)/0.537$$

$$\Rightarrow\; E = (2.52+0.16)/0.537\ MeV$$

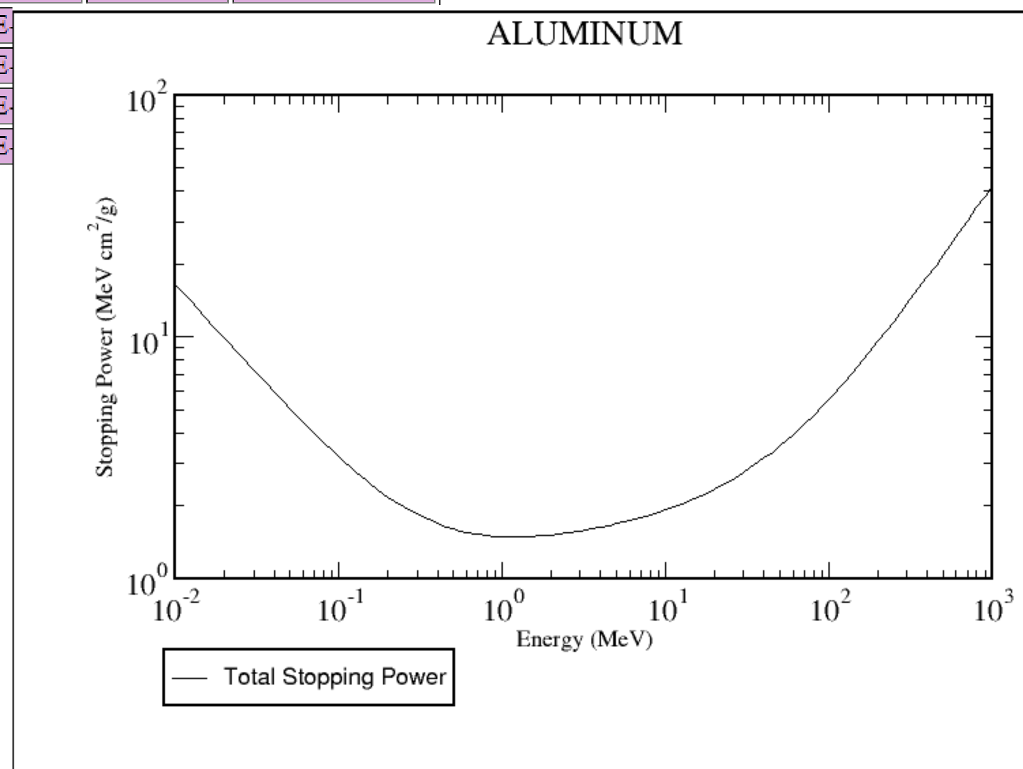
$$\mathbf{E = 5.0\ MeV}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

NIST: National Institute of Standards and Technology

https://www.nist.gov/

(required) Kinetic Energy (MeV)	Stopping Power (MeV cm^2/g)			CSDA Range (g/cm^2)	Radiation Yield	Density Effect Parameter
	Collision	Radiative	Total			
1.000E-02	1.649E+01	6.559E-03	1.650E+01	3.539E-04	2.132E-04	3.534E-04
1.250E-02	1.398E+01	6.700E-03	1.398E+01	5.192E-04	2.583E-04	4.937E-04
1.500E-02	1.220E+01	6.798E-03	1.221E+01	7.111E-04	3.017E-04	6.538E-04
1.750E-02	1.088E+01	6.871E-03	1.088E+01	9.284E		
2.000E-02	9.844E+00	6.926E-03	9.851E+00	1.170E		
2.500E-02	8.338E+00	7.004E-03	8.345E+00	1.724E		
3.000E-02	7.287E+00	7.059E-03	7.294E+00	2.367E		



Stopping-Power & Range Tables for Electrons, Protons, and Helium Ions

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Παραμετροποίηση της ανασχετικής ισχύος S(E)

$$\boxed{S(E) = -\frac{dE}{dx} = a \cdot E^{-b} \quad (a > 0 \wedge b > 0)}$$

Πώς εκφράζεται η εμβέλεια με την παραπάνω παραμετροποίηση;

$$R = \int_0^{E_0} \frac{dE}{S(E)} = \int_0^{E_0} \frac{dE}{a \cdot E^{-b}} = \frac{1}{a} \int_0^{E_0} E^{b}\, dE = \frac{1}{a\,(b+1)} E_0^{b+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R = \frac{1}{a\,(b+1)} E_0^{b+1}}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Παραμετροποίηση της ανασχετικής ισχύος S(E)

$$S(E) = -\frac{dE}{dx} = a \cdot E^{-b} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{a\,(b+1)} E_0^{b+1}$$

<u>Ερώτηση</u>: Για α-σωμάτια μερικών MeV η εμβέλεια είδαμε πως δίνεται από τη σχέση $R\,[cm] = 0.318 \cdot (E[MeV])^{3/2}$. Ποιες οι τιμές των παραμέτρων a και b αν ακολουθηθεί η παραπάνω παραμετροποίηση για το S(E);

<u>Απάντηση</u>: Είναι προφανές πως ισχύει:

$$\begin{Bmatrix} [a \cdot (b+1)]^{-1} = 0.318 \\ b+1 = 3/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a \cdot (b+1) = 3.14 \\ b = 1/2 = 0.50 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a \cdot (b+1) = 3.14 \\ b = 0.50 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a = 2.10 \\ b = 0.50 \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$S(E) = 2.10 \cdot E^{-0.5} = \frac{2.10}{\sqrt{E}} [MeV/cm]$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Συσχετισμός της Εμβέλειας R με την Ενέργεια και το z σωματιδίου

$$\boxed{R = \int_0^{E_0} \frac{dE}{S(E)} = \int_0^{E_0} \frac{dE}{-dE/dx}}$$

Από τον τύπο του Bethe για δοσμένο υλικό (Z) του απορροφητή ισχύει:

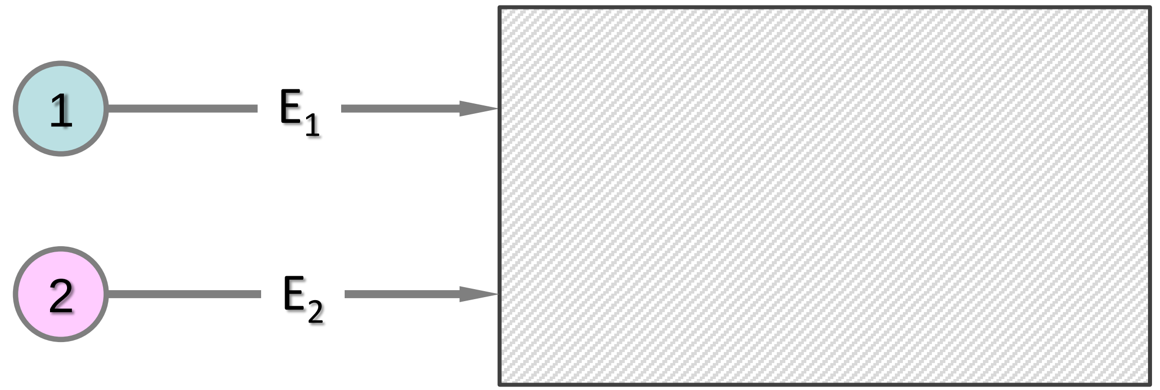
$$S(E) = -\frac{dE}{dx} \approx \frac{z^2}{v^2} \approx \frac{z^2 \cdot M}{M \cdot v^2} \approx \frac{z^2 \cdot M}{E}$$

Κατά συνέπεια:

$$R \approx \int_0^{E_0} \frac{E}{z^2 \cdot M} dE \approx \frac{E_0^2}{z^2 \cdot M} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{R \approx \frac{E_0^2}{z^2 \cdot A}}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Ίδιο εισερχόμενο σωματίδιο – Διαφορετικές Ενέργειες



$$\boxed{R \approx \frac{E_0^2}{z^2 \cdot A}}$$

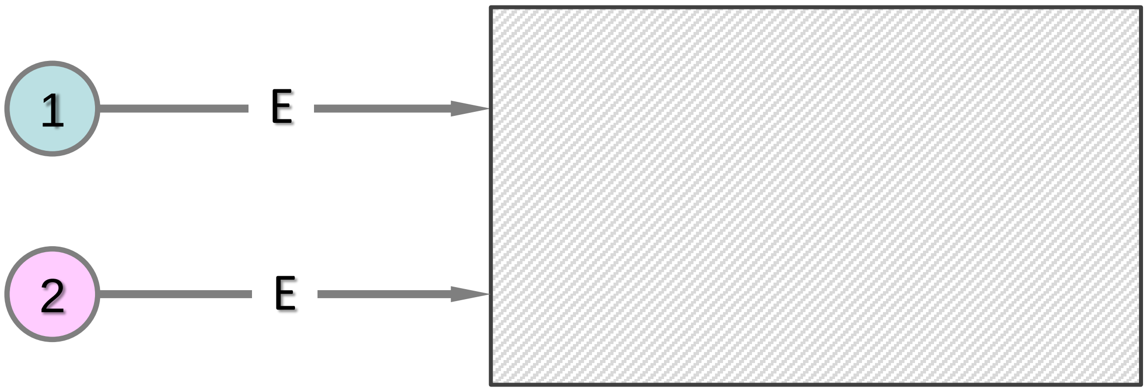
ΙΔΙΟ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ ⇒

$$\frac{R_1}{R_2} \approx \left(\frac{E_1^2}{z^2 \cdot A}\right) : \left(\frac{E_2^2}{z^2 \cdot A}\right) \approx \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} \approx \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^2}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Ισες Ενέργειες – Διαφορετικό εισερχόμενο σωματίδιο



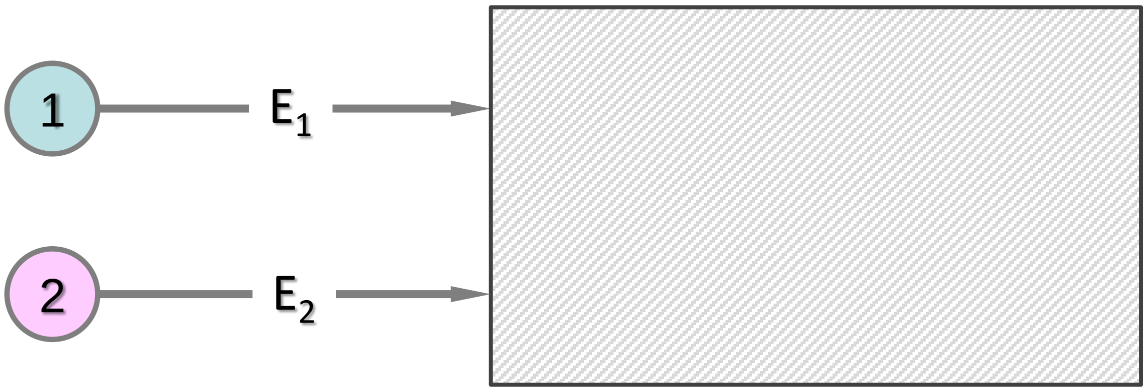
$$\boxed{R \approx \frac{E_0^2}{z^2 \cdot A}}$$

ΙΣΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ $\Rightarrow$ $\dfrac{R_1}{R_2} \approx \left(\dfrac{E_0^2}{z_1^2 \cdot A_1}\right) \div \left(\dfrac{E_0^2}{z_2^2 \cdot A_2}\right) \approx \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2 \cdot \dfrac{A_2}{A_1}$

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} \approx \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 \cdot \frac{A_2}{A_1}}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Διαφορετικά σωματίδια – Διαφορετικές Ενέργειες – ΙΔΙΑ ΕΜΒΕΛΕΙΑ



$$\boxed{R \approx \frac{E_0^2}{z^2 \cdot A}}$$

ΙΔΙΑ ΕΜΒΕΛΕΙΑ $\Rightarrow$ $$\frac{R_1}{R_2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{E_1^2}{z_1^2 \cdot A_1}\right) = \left(\frac{E_2^2}{z_2^2 \cdot A_2}\right) \Rightarrow \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^2 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 \cdot \frac{A_1}{A_2}$$

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A_2}}}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Διαφορετικά σωματίδια – Διαφορετικές Ενέργειες – ΙΔΙΑ ΕΜΒΕΛΕΙΑ

<u>Ερώτηση</u>: Ποια πρέπει να είναι η ενέργεια ιόντων άνθρακα ^{12}C ώστε να παρουσιάζουν εμβέλεια σε δοσμένο υλικό ίση με την εμβέλεια πρωτονίων ενέργειας 70 MeV? (Μη σχετικιστική προσέγγιση).

$$R \approx \frac{E_0^2}{z^2 \cdot A}$$

ΙΔΙΑ ΕΜΒΕΛΕΙΑ ⇒

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A_2}}}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \Rightarrow \frac{E_{12C}}{E_p} = \frac{6}{1} \cdot \sqrt{\frac{12}{1}} = 20.8$$

$$\Downarrow$$

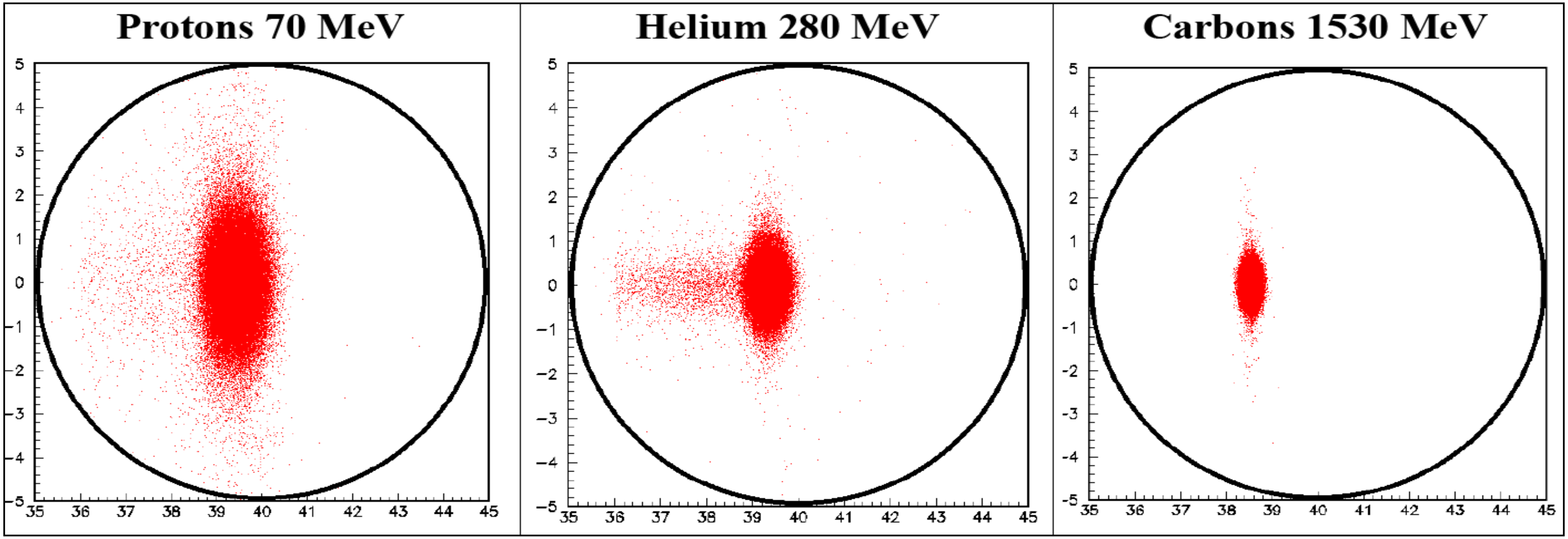
$$\boxed{E_{12C} \approx 1460\,\text{MeV}}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Διαφορετικά σωματίδια – Διαφορετικές Ενέργειες – ΙΔΙΑ ΕΜΒΕΛΕΙΑ

<u>Ερώτηση</u>: Ποια πρέπει να είναι η ενέργεια ιόντων άνθρακα ^{12}C ώστε να παρουσιάζουν εμβέλεια σε δοσμένο υλικό ίση με την εμβέλεια πρωτονίων ενέργειας 70 MeV? (Μη σχετικιστική προσέγγιση).

$$\boxed{E_{12C} \approx 1460\,\mathrm{MeV}}$$

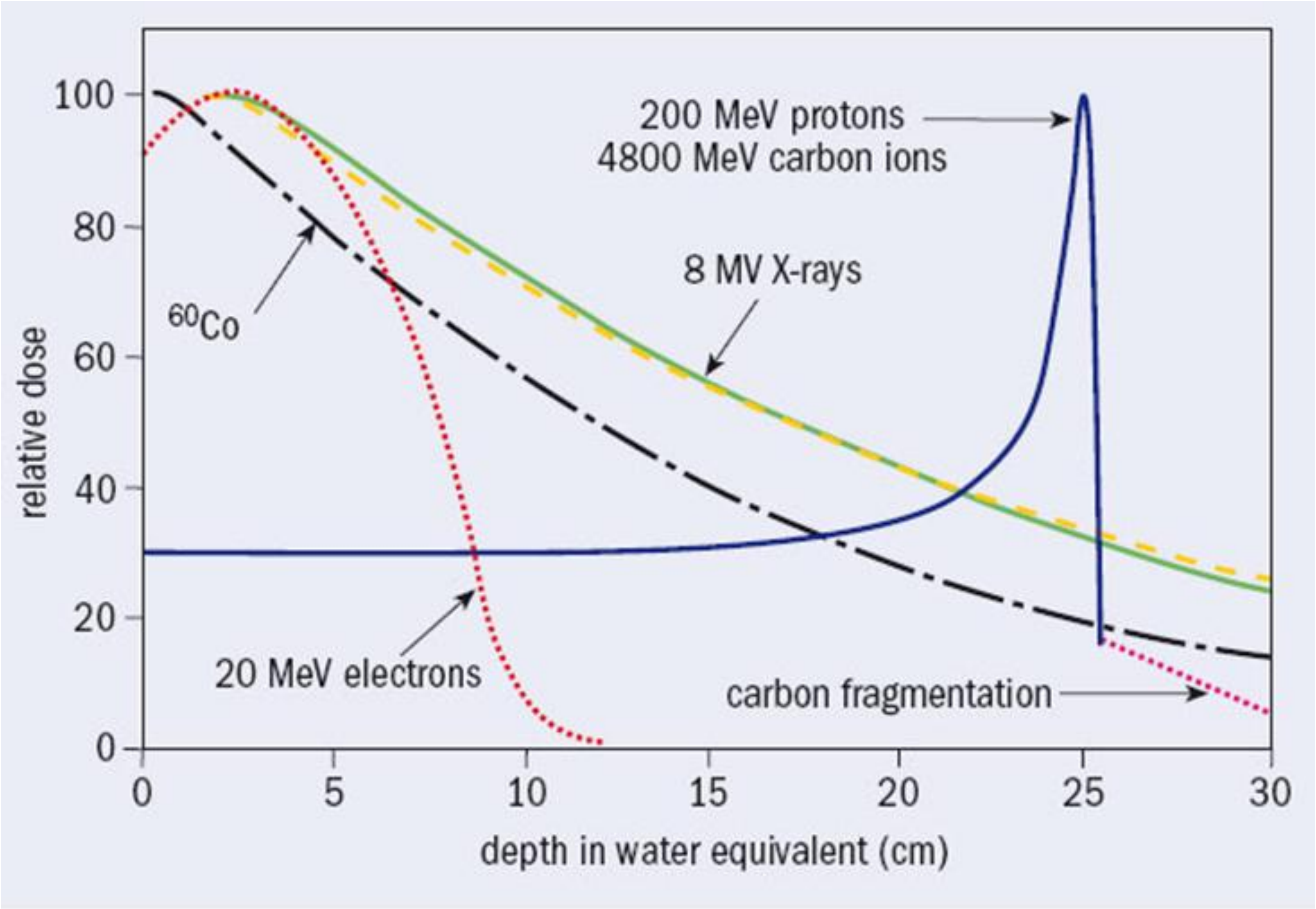


Προσομοιώσεις GEANT4 / GATE

Α. Γκικούδη, Πτυχιακή Εργασία, ΕΚΠΑ (2019)

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

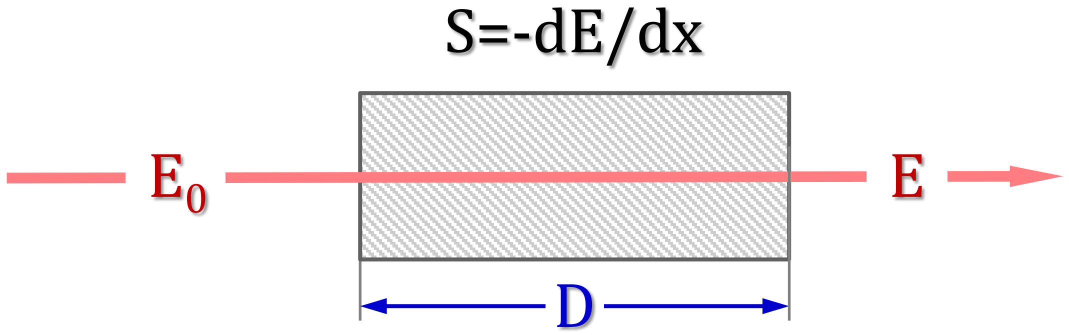
Διαφορετικά σωματίδια – Διαφορετικές Ενέργειες – ΙΔΙΑ ΕΜΒΕΛΕΙΑ



ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Απομένουσα ενέργεια μετά από διέλευση υλικού πάχους D

Φορτισμένο σωματίδιο αρχικής ενέργειας E_0 υπεισέρχεται σε σώμα πάχους D και εξέρχεται αυτού. Ζητείται η εναπομένουσα ενέργεια Ε του σωματιδίου.



$$D = \int_0^D dx = \int_{E_0}^{E} \frac{dx}{dE} dE = \int_{E_0}^{E} \frac{1}{dE/dx} dE = \int_{E}^{E_0} \frac{dE}{S(E)}$$

$$\boxed{D = \int_{E}^{E_0} \frac{dE}{S(E)} = \int_{E}^{E_0} \frac{dE}{-dE/dx}}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Απομένουσα ενέργεια μετά από διέλευση υλικού πάχους D

Φορτισμένο σωματίδιο αρχικής ενέργειας E_0 υπεισέρχεται σε σώμα πάχους D και εξέρχεται αυτού. Ζητείται η εναπομένουσα ενέργεια E του σωματιδίου.

$$\boxed{D = \int_E^{E_0} \frac{dE}{S(E)} = \int_E^{E_0} \frac{dE}{-dE/dx}}$$

Εάν χρησιμοποιηθεί η προηγούμενη παραμετροποίηση $\boxed{S(E) = a \cdot E^{-b}}$ τότε:

$$D = \int_E^{E_0} \frac{dE}{a \cdot E^{-b}} \Rightarrow D = \left. \frac{E^{b+1}}{a \cdot (b+1)} \right|_E^{E_0} = \frac{E_0^{b+1}}{a \cdot (b+1)} - \frac{E^{b+1}}{a \cdot (b+1)} \Rightarrow E^{b+1} = E_0^{b+1} - D \cdot a \cdot (b+1)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E = \sqrt[b+1]{E_0^{b+1} - D \cdot a \cdot (b+1)}}$$