

ΙΑΤΡΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

Π. Παπαγιάννης & Ε. Στυλιάρης
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
2024 - 2025

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

- Ο Προβολικός Πίνακας
- Μέθοδος της Οπισθοπροβολής (Backprojection)
- Αντιστροφή με τη Μέθοδο Fourier
- Η Τομογραφική Ανακατασκευή σαν Γραμμικό Πρόβλημα
- Επαναληπτικές Μέθοδοι Ανακατασκευής Τομογραφικής Εικόνας
- Η Αλγεβρική Μέθοδος Ανακατασκευής - Algebraic Reconstruction Technique (ART)

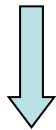
ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Parallel-Beam Geometry

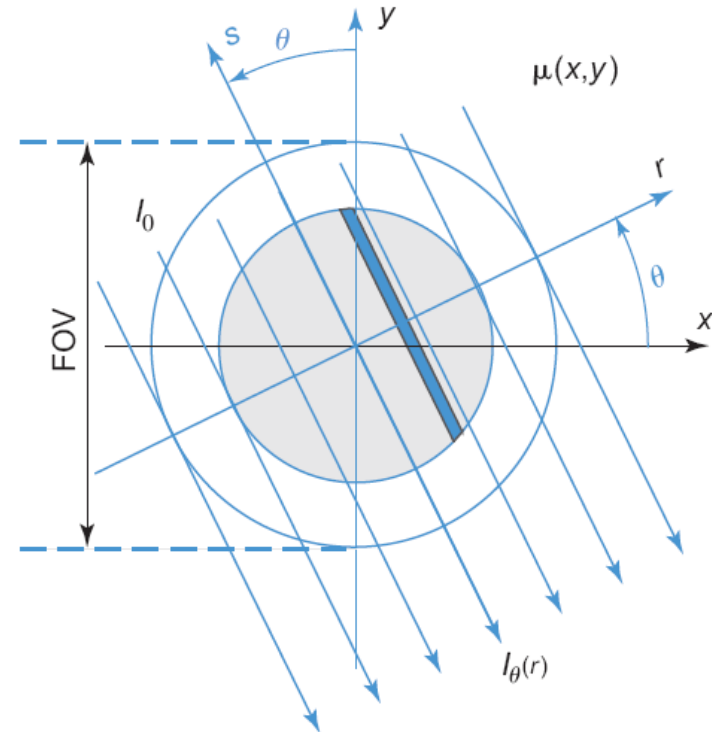
$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

$$I_{\theta}(r) = I_0 \cdot e^{-\int_{L_{r,\theta}} \mu(x,y) ds}$$



$$I_0 \cdot e^{-\int_{L_{r,\theta}} \mu(r \cdot \cos \theta - s \cdot \sin \theta, r \cdot \sin \theta + s \cdot \cos \theta) ds}$$

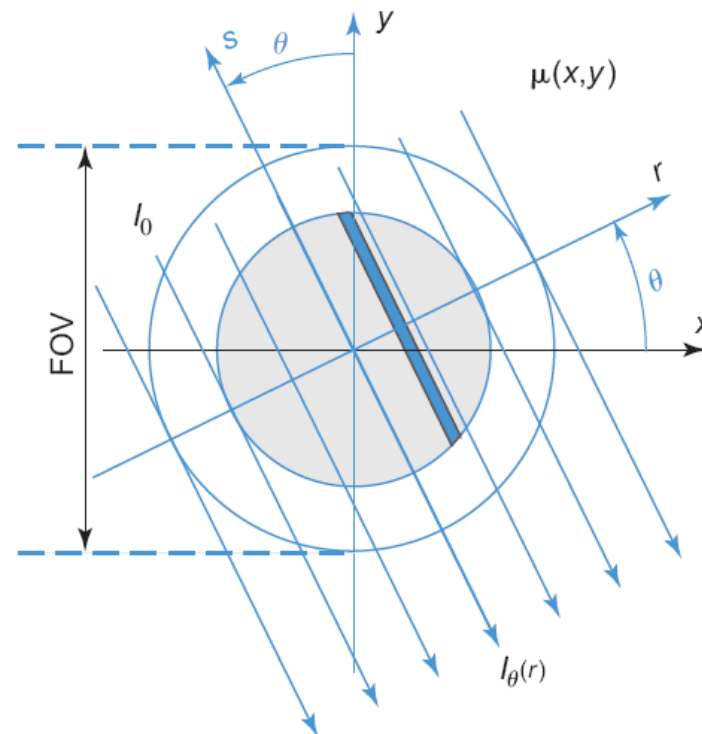


ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

$$I_{\theta}(r) = I_0 \cdot e^{-\int_{L_{r,\theta}} \mu(x,y) ds}$$



Sinogram



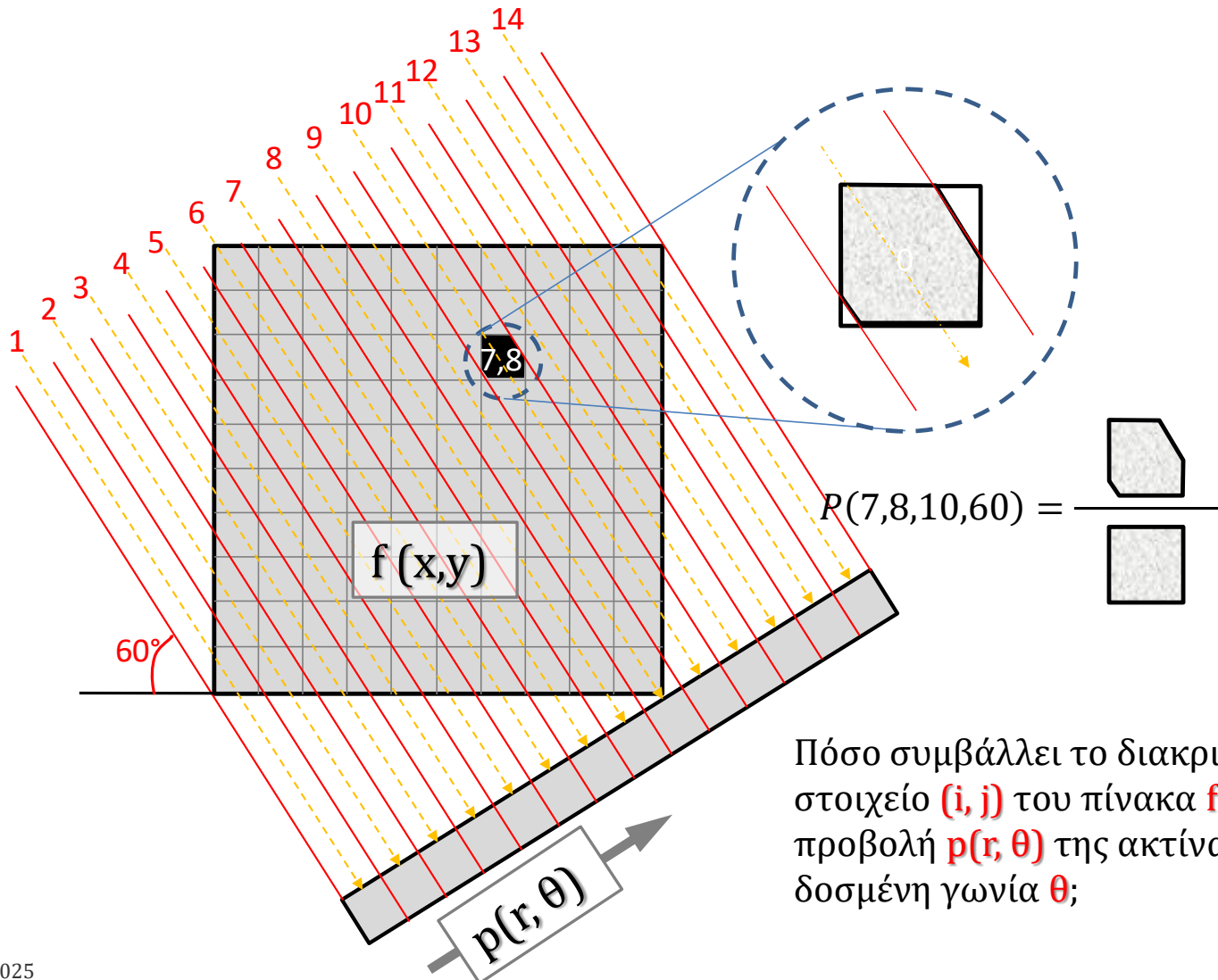
The usual solution: **Inverse Radon Transform**

$$p(r, \theta) = \mathcal{R}\{f(x, y)\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(r \cdot \cos \theta - s \cdot \sin \theta, r \cdot \sin \theta + s \cdot \cos \theta) ds.$$

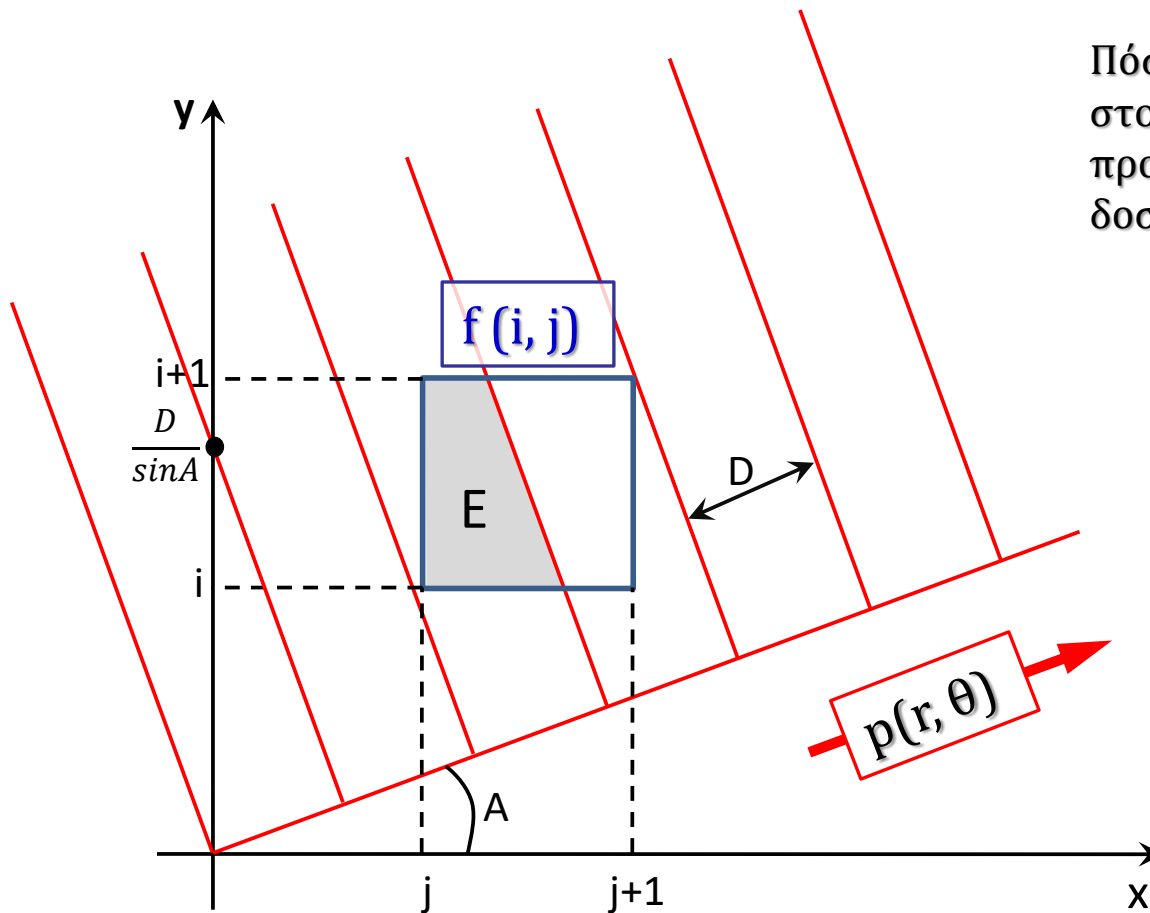
ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Η έννοια του Προβολικού Πίνακα (Projection Matrix)



ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Η έννοια του Προβολικού Πίνακα (Projection Matrix)



Πόσο συμβάλλει το διακριτοποιημένο στοιχείο (i, j) του πίνακα $f(x, y)$ στην προβολή $p(r, \theta)$ της ακτίνας r για δοσμένη γωνία θ ;



Γεωμετρική Μέθοδος

Αναλυτική μέθοδος υπολογισμού του εμβαδού επικάλυψης ακτίνας – κυψελίδας πίνακα.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Η έννοια του Προβολικού Πίνακα (Projection Matrix)

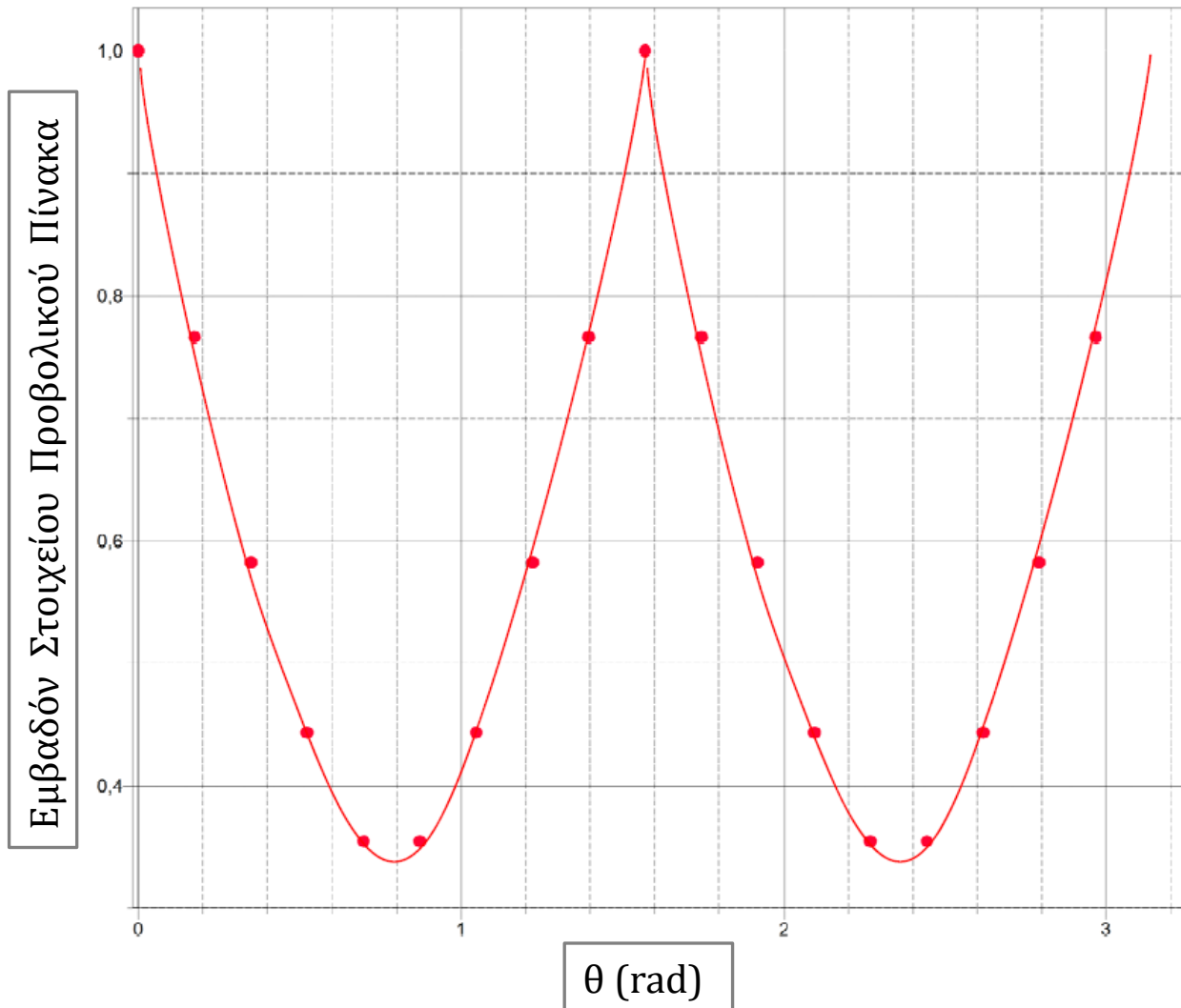
Γραφική Αναπαράσταση	Λογική Διάκριση – Υπολογισμός Εμβαδού	
	<u>Λογικές Εκφράσεις:</u> $Av \ A = 0^\circ \Rightarrow E = (c - x(1)) * 1$ $Av \ E < 0 \Rightarrow E = 0$ $Av \ E > 1 \Rightarrow E = 1$	
	<u>Λογικές Εκφράσεις:</u> $Av \ A = 90^\circ \Rightarrow E = (c - y(1)) * 1$ $Av \ E < 0 \Rightarrow E = 0$ $Av \ E > 1 \Rightarrow E = 1$	
	<u>Προορισμένες Μεταβλητές</u> $x_t = x(1)$ $y_t = x_t \cdot K + C$ $x_{t2} = x(2)$ $y_{t2} = x_{t2} \cdot K + C$	<u>Λογικές Εκφράσεις</u> $y(1) < y_t < y(4)$ $y(2) < y_{t2} < y(3)$ <u>Εμβαδό</u> $E = (y_{t2} - y(2)) * 1 + \frac{y_t - y_{t2}}{2}$
	<u>Προορισμένες Μεταβλητές</u> $y_t = y(3)$ $x_t = \frac{y_t - C}{K}$ $y_t = y(1)$ $x_{t2} = \frac{y_{t2} - C}{K}$	<u>Λογικές Εκφράσεις</u> $x(4) < x_t < x(3)$ $x(1) < x_{t2} < x(2)$ <u>Εμβαδό</u> $E = (x_t - x(1)) * 1 + \frac{x_{t2} - x_t}{2}$
	<u>Προορισμένες Μεταβλητές</u> $y_t = y(3)$ $x_t = \frac{y_t - C}{K}$ $y_t = y(1)$ $x_{t2} = \frac{y_{t2} - C}{K}$	<u>Λογικές Εκφράσεις</u> $x_t > x(2)$ $x_{t2} > x(2)$ <u>Εμβαδό</u> $E = 1$
	<u>Λογική Έκφραση:</u> $y(3) = k \cdot x(3) + c$ <u>Εμβαδό:</u> $E = 1$	

Υπολογισμός
εμβαδού όλων των
δυνατών σαρώσεων
ακτίνας – κυψελίδας
πίνακα.

	<u>Λογικές Εκφράσεις:</u> $y(4) = k \cdot x(4) + c$ $k = -1$ <u>Εμβαδό:</u> $E = 0,5$	
	<u>Λογικές Εκφράσεις:</u> $y(4) = k \cdot x(4) + c$ $k > -1$ <u>Ορισμός Μεταβλητών:</u> $x_t = x(2)$ $y_t = k \cdot x(2) + C$ <u>Εμβαδό:</u> $E = (y_t - y(2)) * 1 + \frac{y(4) - y_t}{2}$	
	<u>Λογικές Εκφράσεις:</u> $y(4) = k \cdot x(4) + c$ $k < -1$ <u>Ορισμός Μεταβλητών:</u> $y_t = y(1)$ $x_t = \frac{y_t - c}{k}$ <u>Εμβαδό:</u> $E = \frac{x_t - x(1)}{2}$	
	<u>Λογικές Εκφράσεις:</u> $y(2) = k \cdot x(2) + c$ $k > -1$ <u>Ορισμός Μεταβλητών:</u> $x_t = x(1)$ $y_t = k \cdot x(1) + C$ <u>Εμβαδό:</u> $E = \frac{y_t - y(1)}{2}$	
	<u>Λογικές Εκφράσεις:</u> $y(2) = k \cdot x(2) + c$ $k < -1$ <u>Ορισμός Μεταβλητών:</u> $y_t = y(3)$ $x_t = \frac{y_t - c}{k}$ <u>Εμβαδό:</u> $E = (x_t - x(1)) * 1 + \frac{x(2) - x_t}{2}$	
	<u>Προορισμένες Μεταβλητές</u> $y_t = y(4)$ $x_t = \frac{y_t - C}{k}$ $x_{t2} = x(2)$ $y_{t2} = k \cdot x_{t2} + c$	<u>Λογικές Εκφράσεις</u> $x(4) < x_t < x(3)$ $y(2) < y_{t2} < y(3)$ <u>Εμβαδό</u> $E = (x_t - x_1) * 1 + \frac{(y_t - y_{t2})(x_{t2} - x_t)}{2} + (y_{t2} - y_t)(x_{t2} - x_t)$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Συμμετρία του Προβολικού Πίνακα



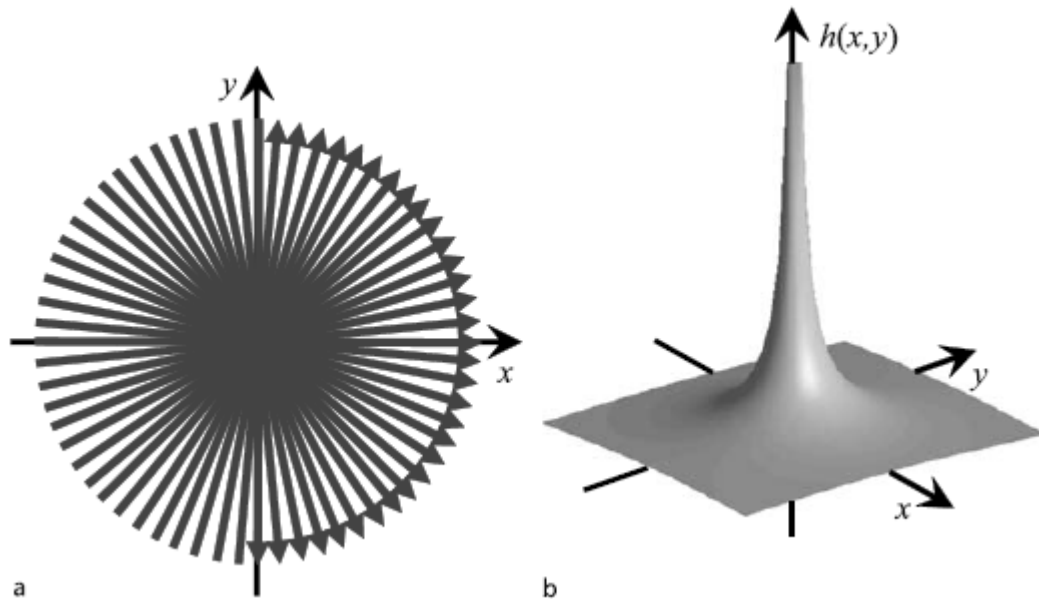
Το εμβάδόν
οποιαδήποτε
στοιχείου του
προβολικού πίνακα P
παρουσιάζει
περιοδικότητα $\pi/2$



Λόγω της γεωμετρικής
συμμετρίας απαιτείται
υπολογισμός μόνο για
το διάστημα $[0, \pi/4]$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Μέθοδος Απλής Οπισθοπροβολής (Simple Backprojection)



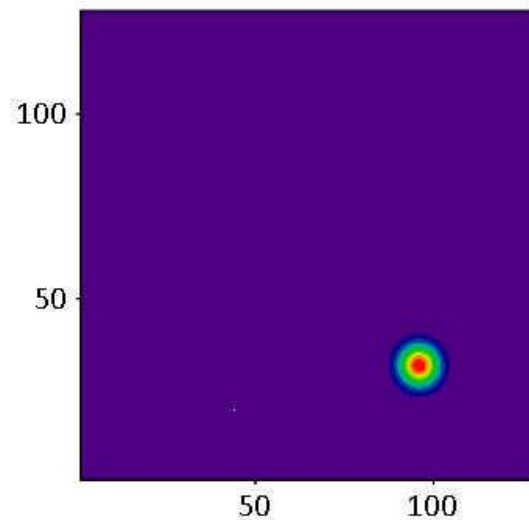
Η καταγραφείσα **ένταση** στο Ημιτονόγραμμα (Sinogram) **$p(r,\theta)$** διαμοιράζεται πίσω (οπισθοπροβάλλεται) στον πίνακα **$f(x,y)$** **ισόποσα**.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Μέθοδος Απλής Οπισθοπροβολής (Simple Backprojection) ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Original Matrix

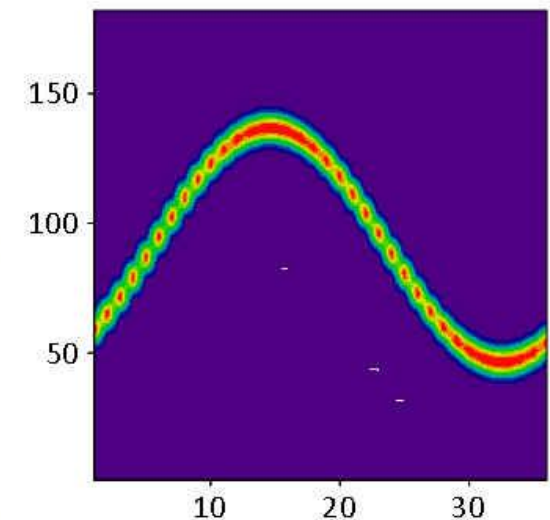
```
MM := READPRN("t1.mtx")
```



MM

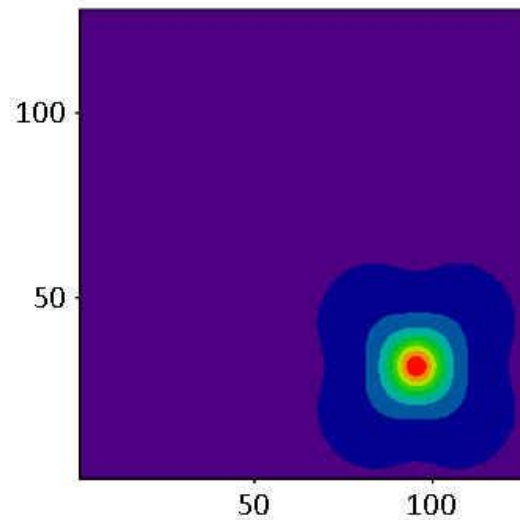
Sinogram

```
SN := READPRN("t1.sin")
```



SN

```
BM := M_Recon(128, SN)
```



BM

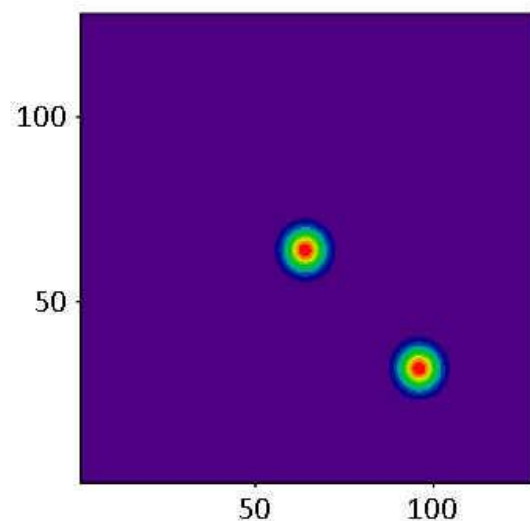
Reconstructed with the BackProjection Method

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Μέθοδος Απλής Οπισθοπροβολής (Simple Backprojection) ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Original Matrix

```
MM := READPRN("t2.mtx")
```

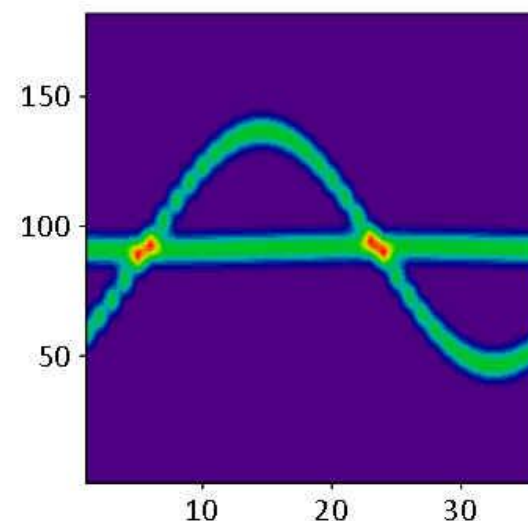


MM

Sinogram

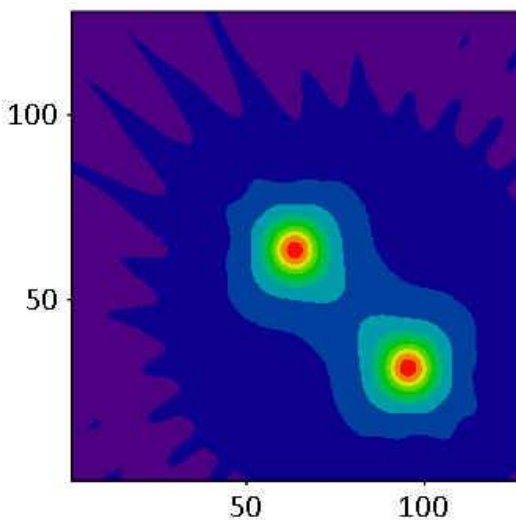
```
SN := READPRN("t2.sin")
```

+



SN

```
BM := M_Recon(128, SN)
```



BM

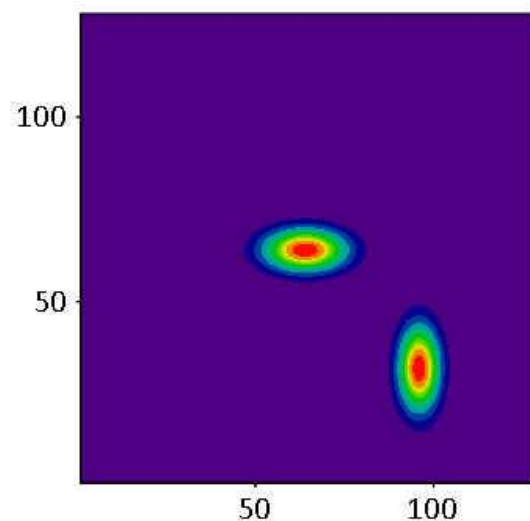
Reconstructed with the BackProjection Method

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Μέθοδος Απλής Οπισθοπροβολής (Simple Backprojection) ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Original Matrix

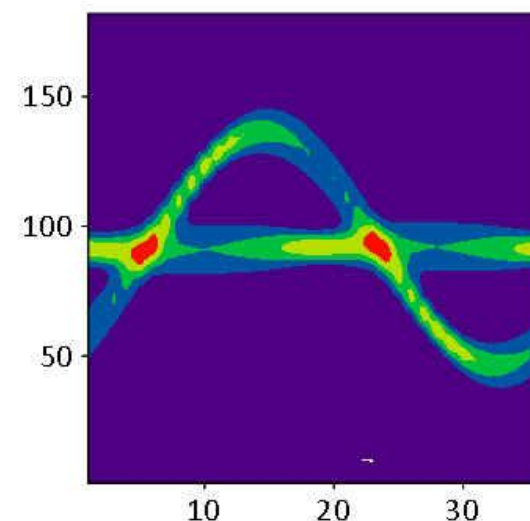
```
MM := READPRN("t2e.mtx")
```



MM

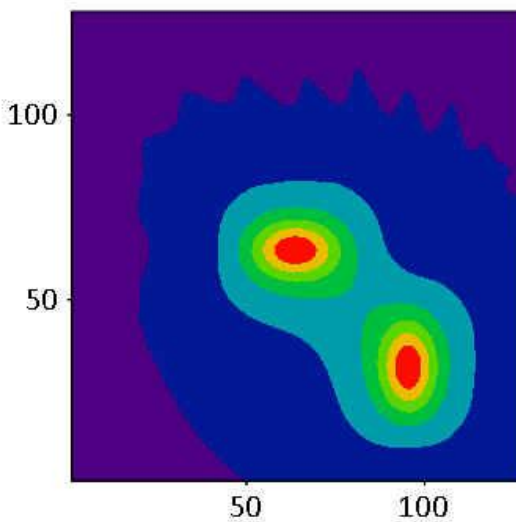
Sinogram

```
SN := READPRN("t2e.sin")
```



SN

```
BM := M_Recon(128, SN)
```



BM

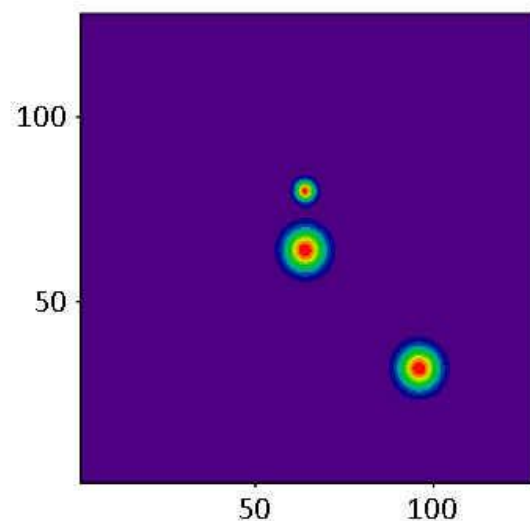
Reconstructed with the BackProjection Method

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Μέθοδος Απλής Οπισθοπροβολής (Simple Backprojection) ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Original Matrix

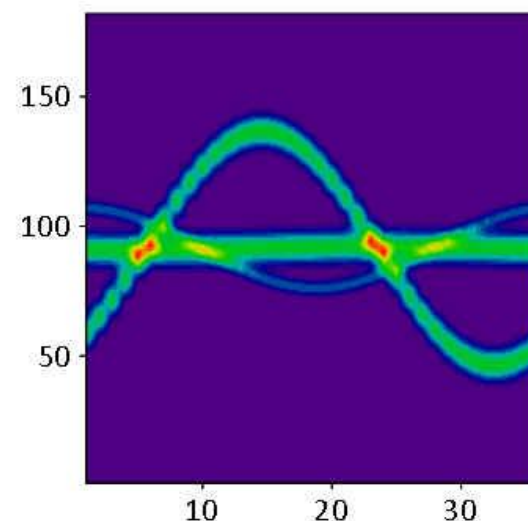
```
MM := READPRN("t3.mtx")
```



MM

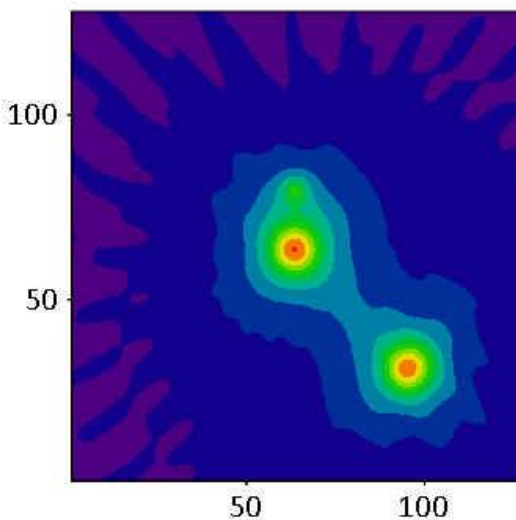
Sinogram

```
SN := READPRN("t3.sin")
```



SN

```
BM := M_Recon(128, SN)
```



BM

Reconstructed with the BackProjection Method

The Inverse Radon Transform

108 Years of the Radon Transform

SITZUNG VOM 30. APRIL 1917.

On the Determination of Functions from their Integrals along Certain Manifolds

Von

JOHANN RADON.

A. Bestimmung einer Punktfunktion in der Ebene aus ihren geradlinigen Integralwerten.

1. Es sei $f(x, y)$ eine für alle reellen Punkte $P = [x, y]$ erklärte reelle Funktion, die folgende Regularitätsbedingungen erfülle:

a₁) $f(x, y)$ sei stetig.

b₁) Es konvergiere das über die ganze Ebene zu erstreckende Doppelintegral

$$\iint \frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

c₁) Wird für einen beliebigen Punkt $P = [x, y]$ und jedes $r \geq 0$

$$\bar{f}_P(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi) d\varphi$$



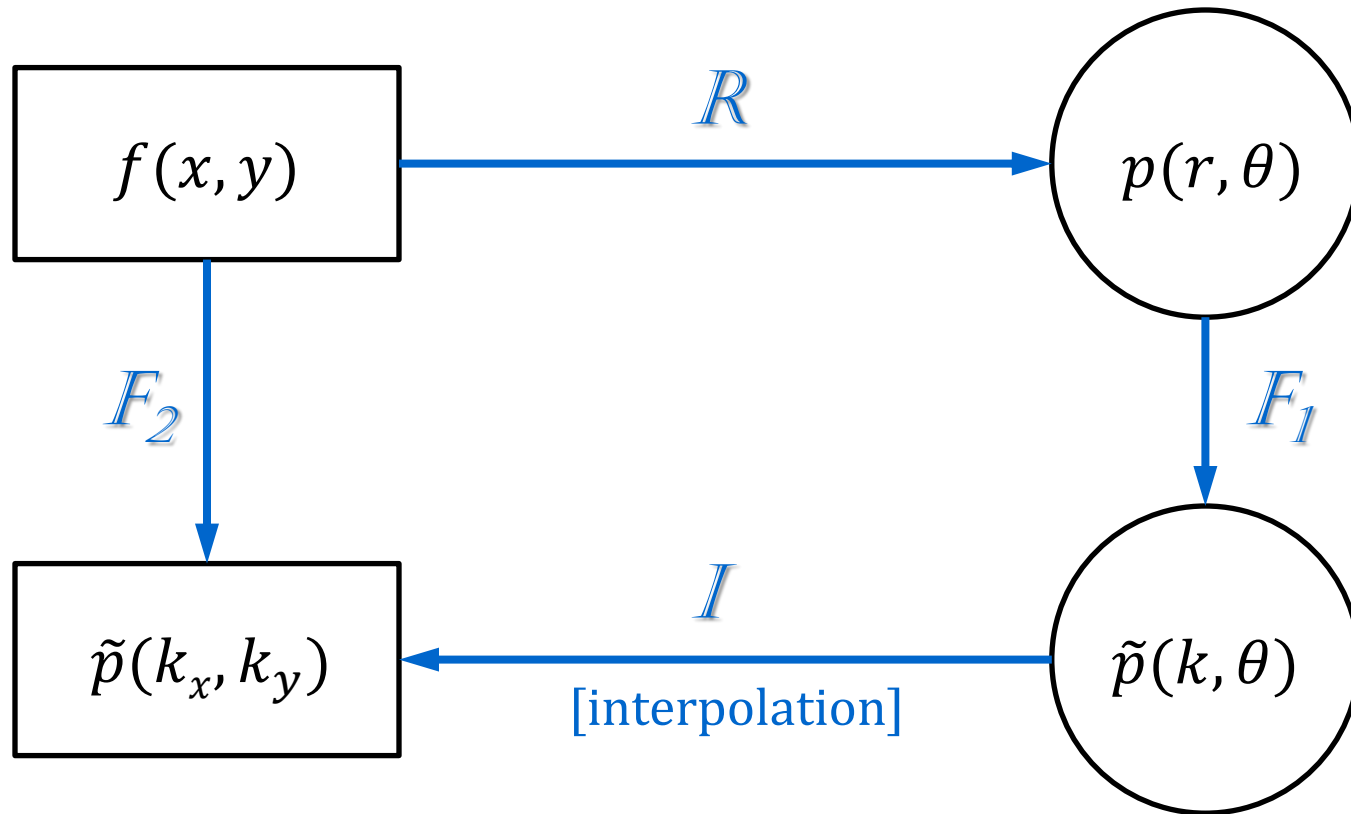
J. Radon

Johann Radon (1887-1956)



The Inverse Radon Transform

Projection-Slice Theorem



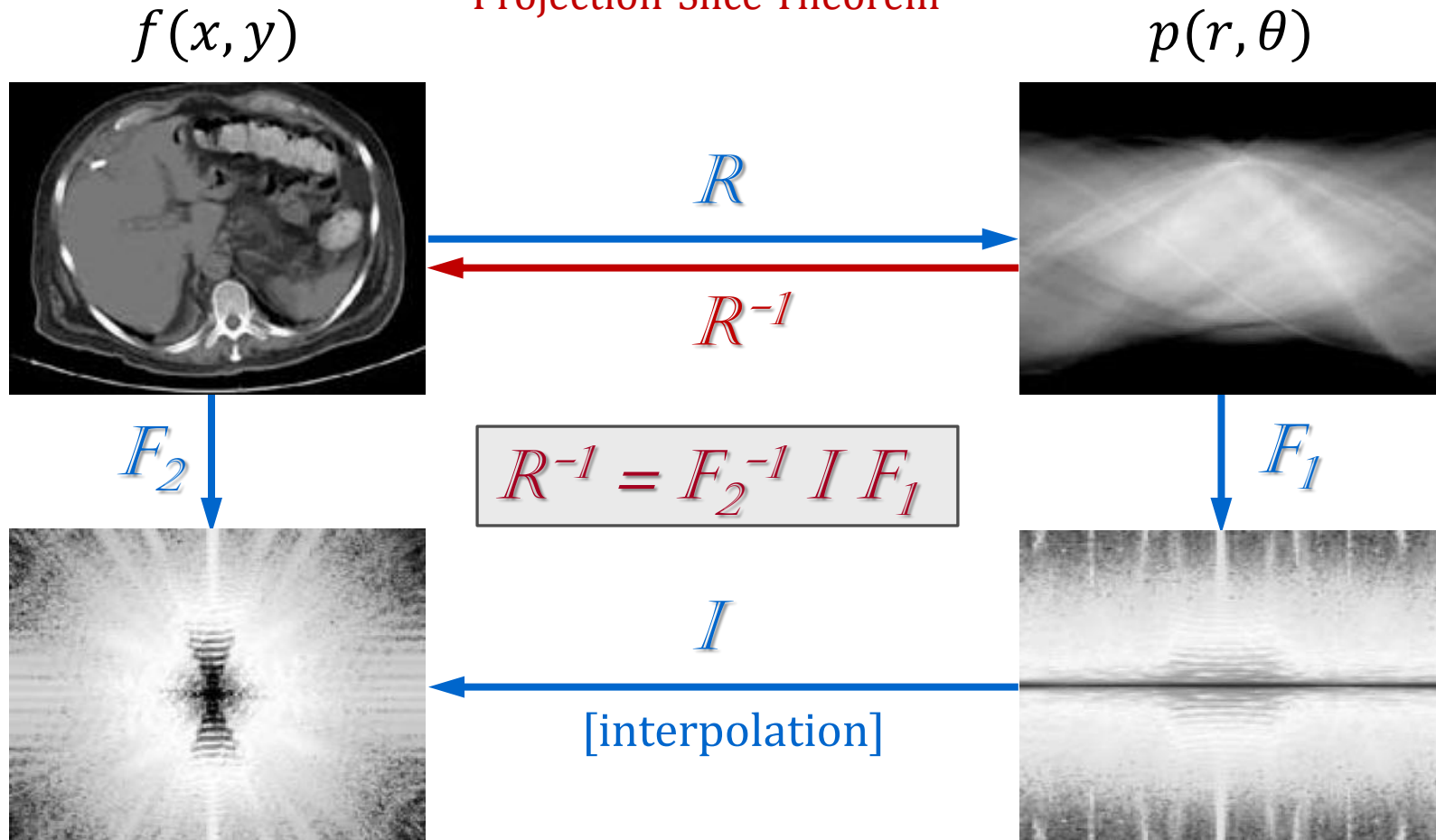
R : Radon Transform $f \rightarrow p$

F_1 : One-Dimensional Fourier Transform $r \rightarrow k$

F_2 : Two-Dimensional Fourier Transform $(x, y) \rightarrow (k_x, k_y)$

The Inverse Radon Transform

Projection-Slice Theorem



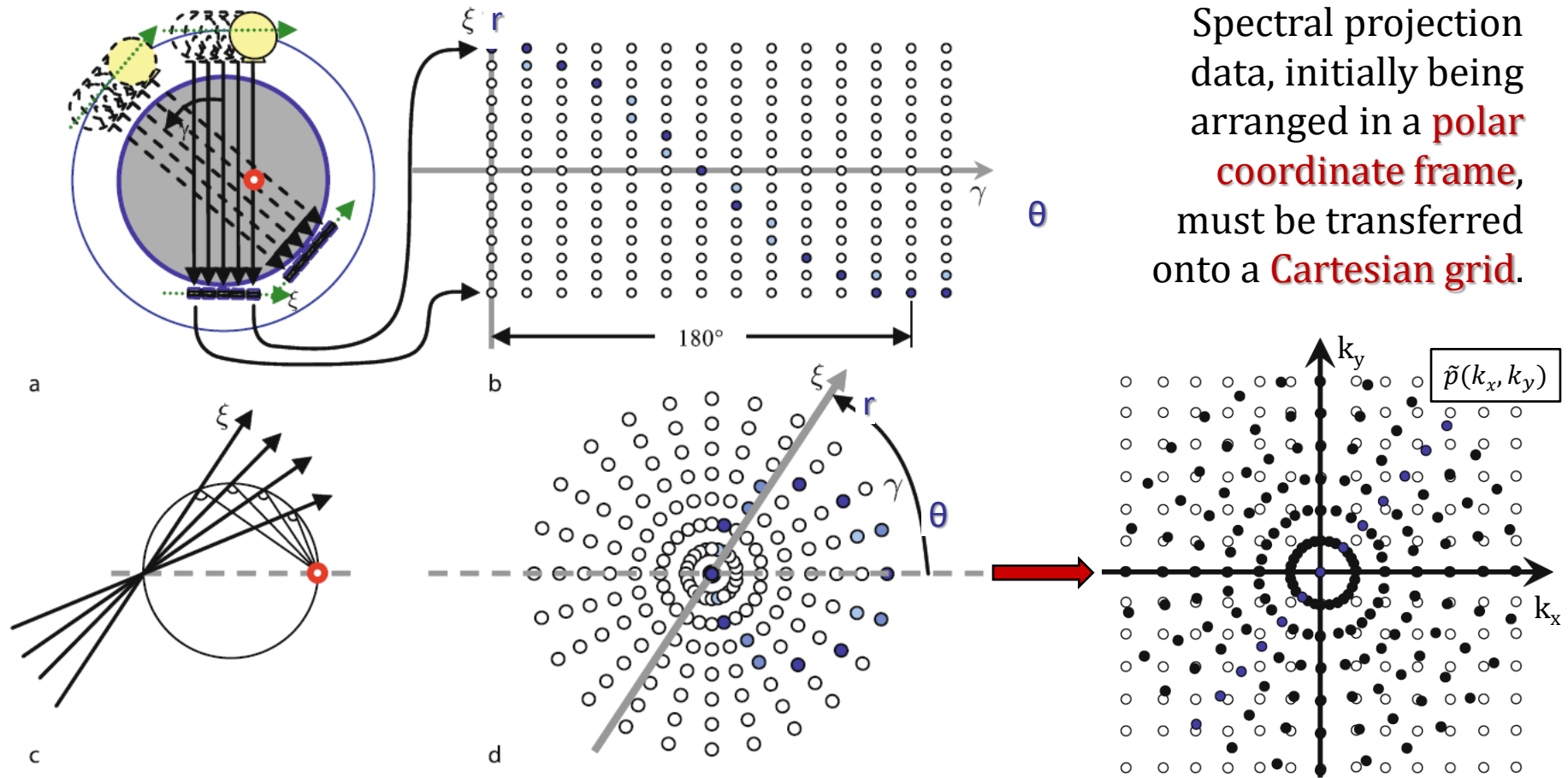
R : Radon Transform $f \rightarrow p$

F_1 : One-Dimensional Fourier Transform $r \rightarrow k$

F_2 : Two-Dimensional Fourier Transform $(x, y) \rightarrow (k_x, k_y)$

The Inverse Radon Transform

F_1 Transform – Interpolation Problems



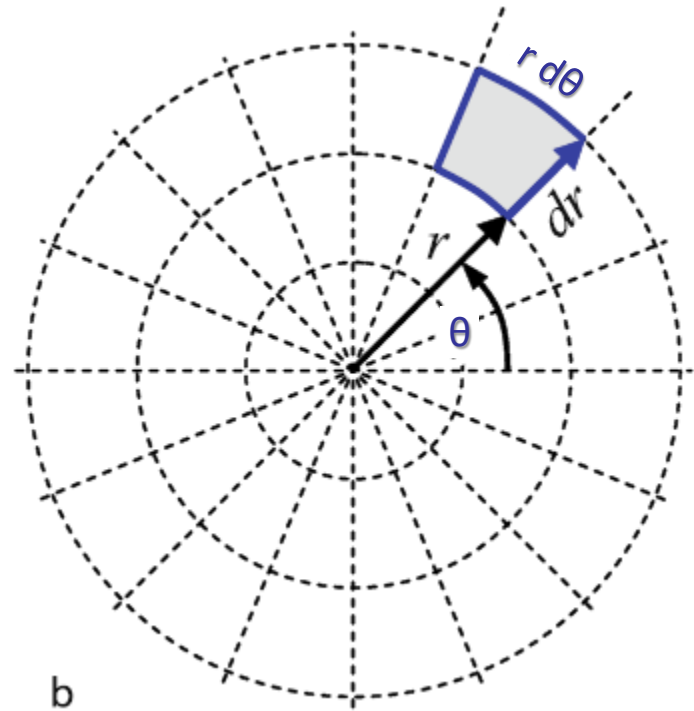
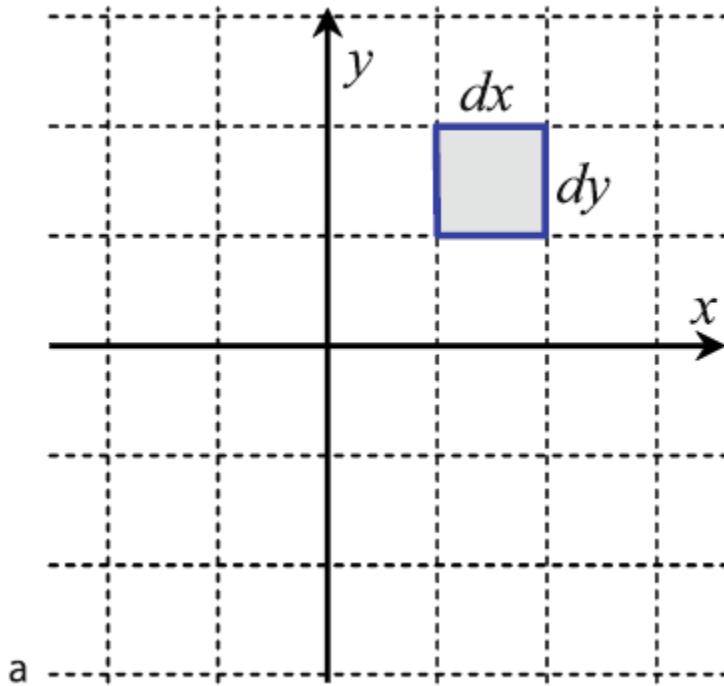
Spectral projection data, initially being arranged in a **polar coordinate frame**, must be transferred onto a **Cartesian grid**.

The F_1 Transform $p(r, \theta) \longrightarrow \tilde{p}(k, \theta)$

Regridding to $\tilde{p}(k_x, k_y)$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Ο μετασχηματισμός F_2 : $f(x,y) \rightarrow F(u,v)$



Μετασχηματισμός των δεδομένων του Ημιτονογράμματος (Sinogram) από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες

The Inverse Radon Transform

F_1 Transform – Interpolation Problems

“A function $f(x,y)$ of compact support in R^2 is uniquely determined by any infinite set, but by no finite set, of its projections.”

(Smith, Solmon and Wagner, 1977)

“May be the most important result of pure mathematics in this area since Radon’s original work.”

(Gordon, 1977)

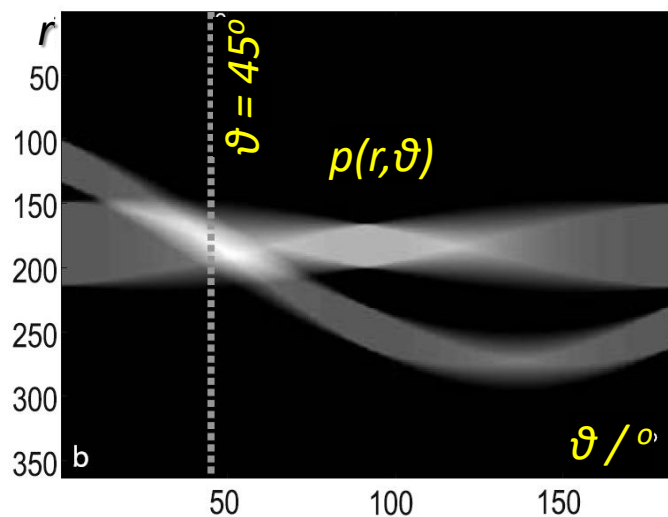
The **discrete nature** of the projections in any realistic problem gives rise to subtle and difficult questions

Classification of Image Reconstruction Algorithms

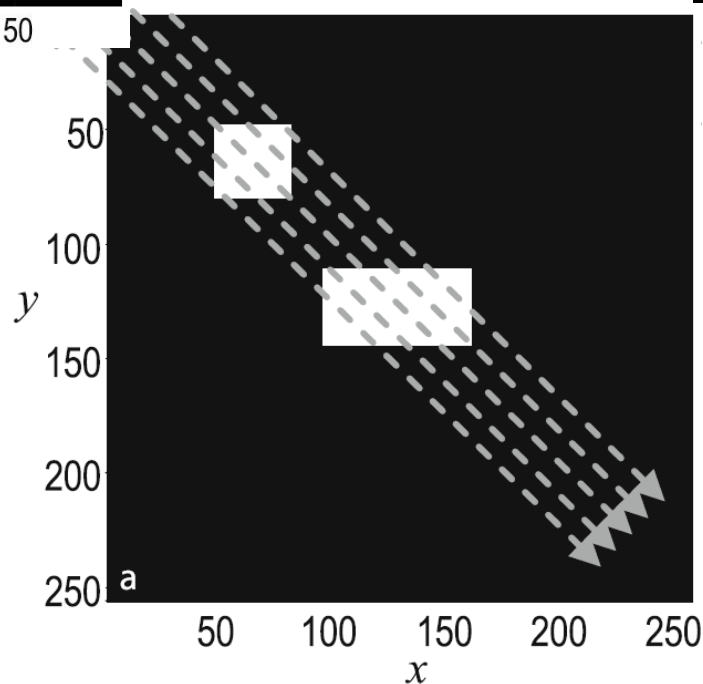
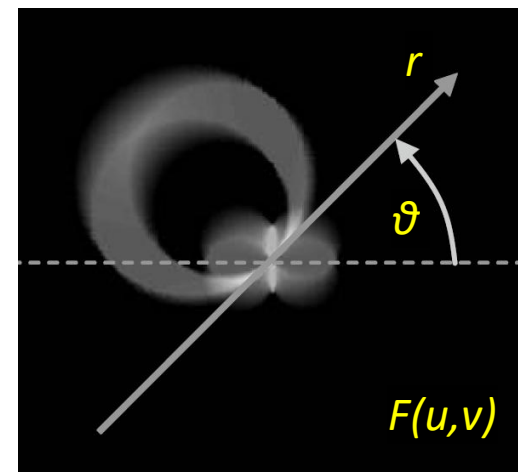
- Direct Fourier methods
- Signal space convolution and frequency space filtering
- **Iterative**
- Series methods with orthogonal functions

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Ανακατασκευή μέσω αντιστροφής Fourier



$$F_1(p)$$



$$F_2^{-1}(F)$$

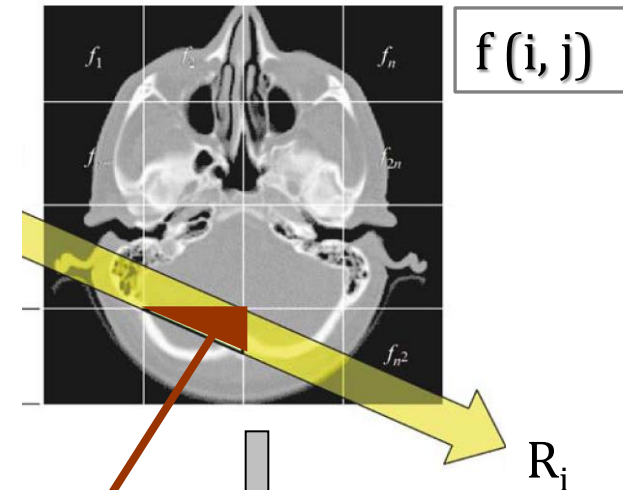
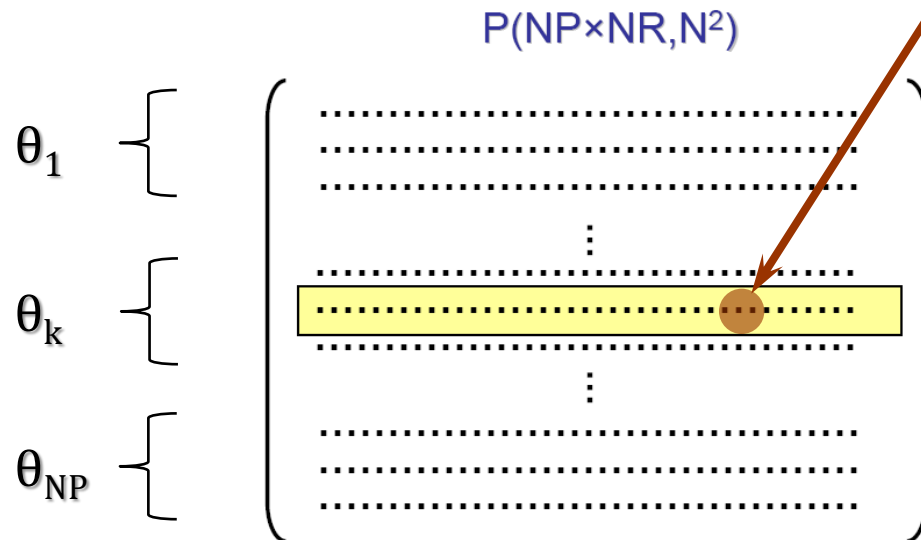
ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΠΡΟΒΟΛΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ P

$i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$

NP: Αριθμός Προβολών (Γωνιών) /
Number of Projections (Angles)

NR: Αριθμός Ακτίνων / Number of Rays



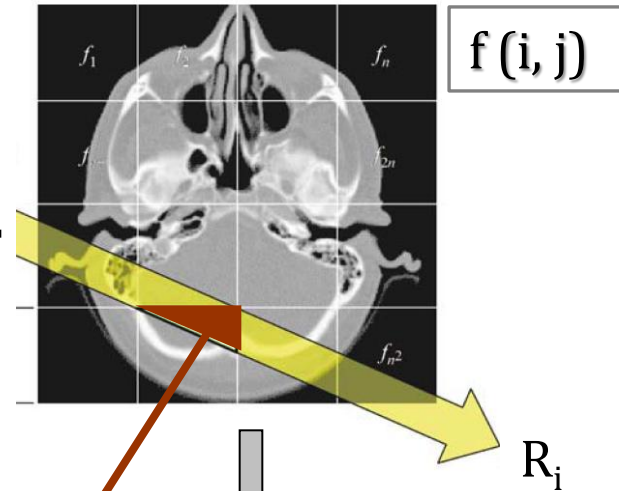
Μπορεί να γραφεί
σαν **μονοδιάστατος**
πίνακας (vector)
μήκους **$N \times N$**

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

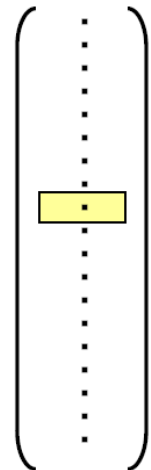
Πώς προκύπτει το Ημιτονόγραμμα;

$$S_i = \sum_{j=1}^{N^2} P_{ij} \times Q_j$$

NP: Number of Projections (Angles)
NR: Number of Rays

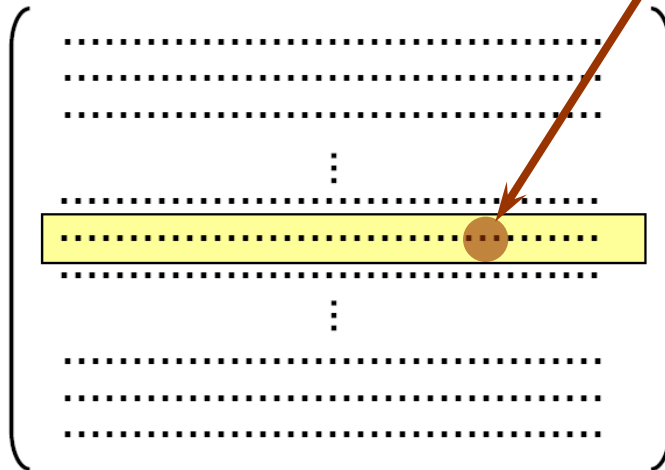


$S(NP \times NR)$



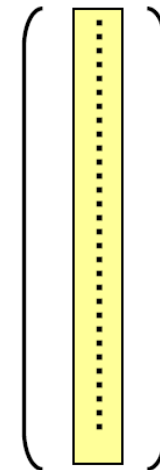
Sinogram

$P(NP \times NR, N^2)$



Projection Matrix

$Q(N^2)$



$f(i, j)$

=

×

R_i

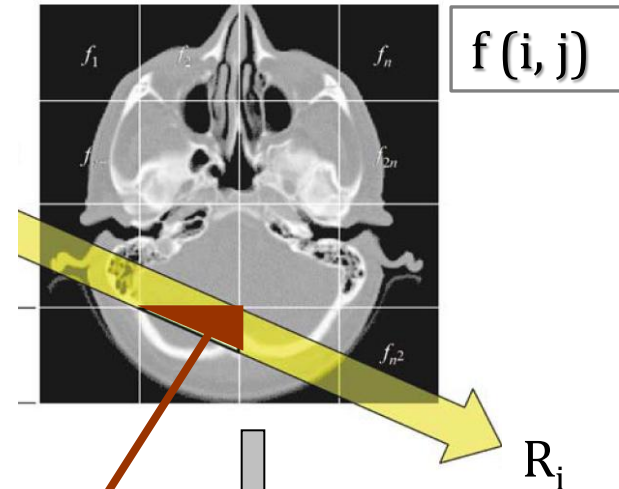
ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Τομογραφία σαν Γραμμικό Πρόβλημα Πινάκων

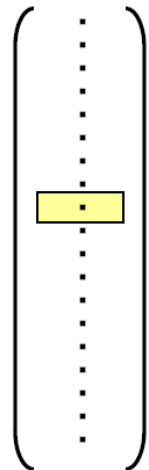
$$S = P \times Q$$

NP: Number of Projections (Angles)

NR: Number of Rays

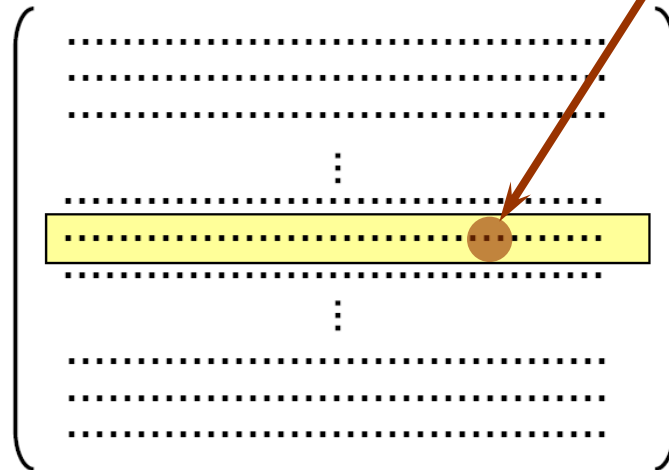


$S(NP \times NR)$



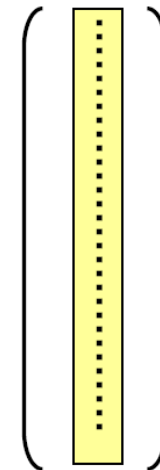
Sinogram

$P(NP \times NR, N^2)$



Projection Matrix

$Q(N^2)$



$f(i, j)$

$\times$

R_i

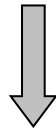
ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Τομογραφία σαν Γραμμικό Πρόβλημα Πινάκων

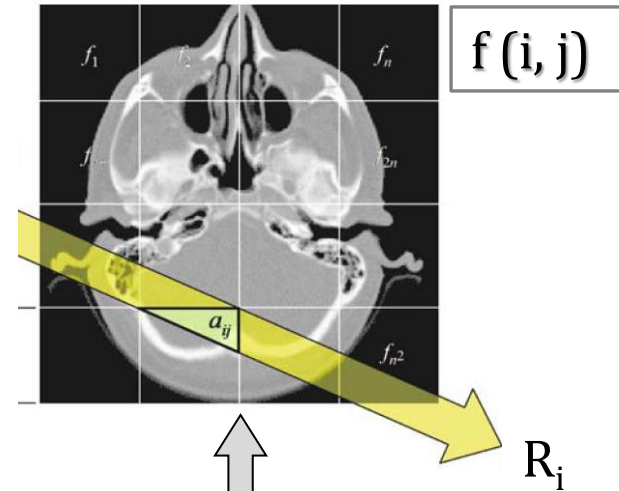
$$S = P \times Q$$



$$P^{-1} \times S = P^{-1} \times P \times Q$$



$$Q = P^{-1} \times S = f(x, y)$$



Μπορεί ο **αντίστροφος προβολικός πίνακας P^{-1}** να δώσει λύση στο τομογραφικό πρόβλημα;



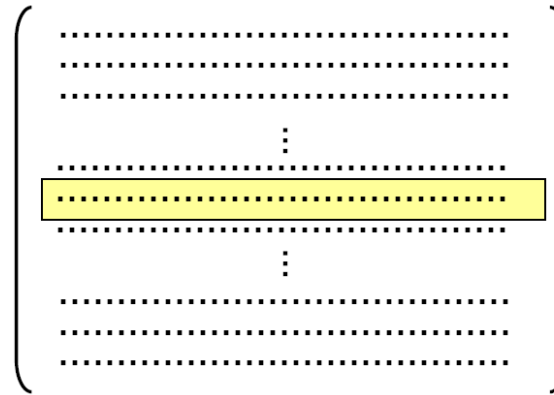
ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Τομογραφία σαν Γραμμικό Πρόβλημα Πινάκων

$$S = P \times Q$$

Διάσταση του πίνακα P
σε ένα τυπικό
τομογραφικό πρόβλημα

$P(NP \times NR, N^2)$



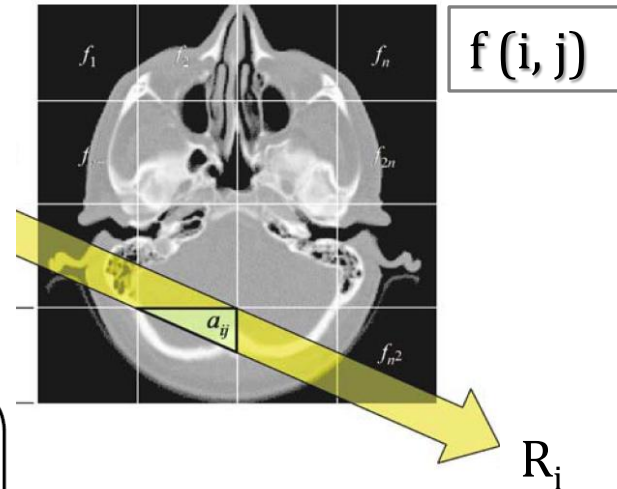
Projection Matrix

ΣΕΙΡΕΣ: Προβολές × Ακτίνες = 36×128

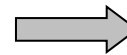
ΣΤΗΛΕΣ: Διάσταση Πίνακα $f = N \times N = 128^2$

Διάσταση Πίνακα

$$P = 36 \times 128^3 = 36 \times (2^7)^3 \simeq 2^{26}$$



Πρακτικά αδύνατος ο
υπολογισμός του
αντιστρόφου πίνακα
 P^{-1}

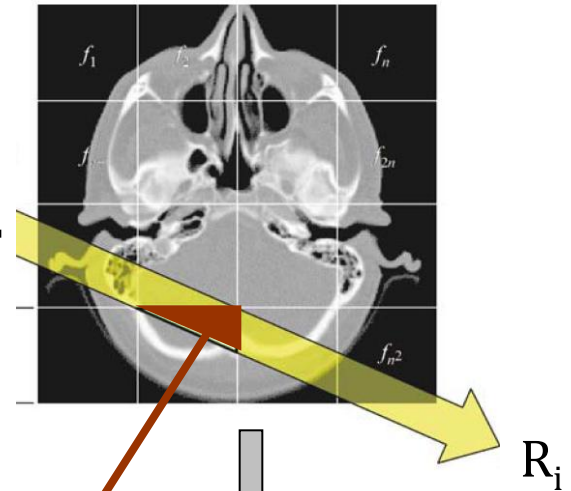


ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

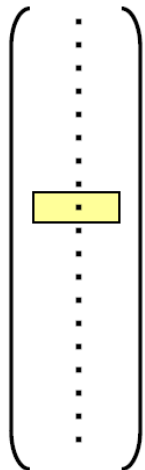
Algebraic Reconstruction Methods

$$R_i = \sum_{j=1}^{N^2} P_{ij} \times Q_j$$

NP: Number of Projections (Angles)
NR: Number of Rays

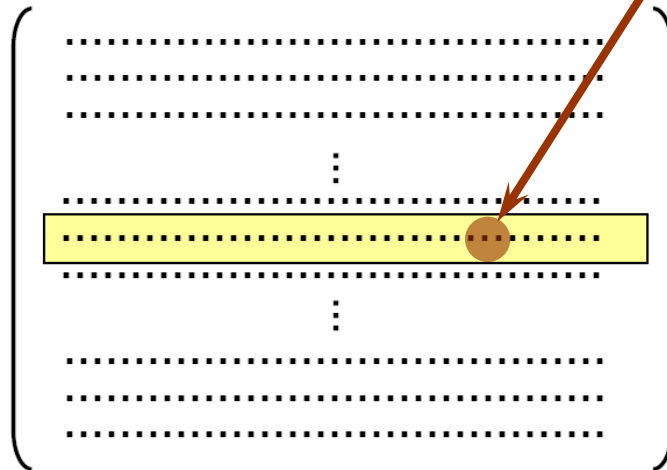


$R(NP \times NR)$



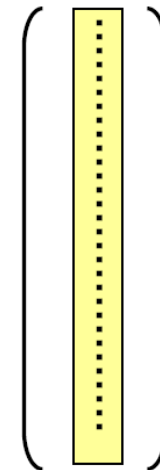
Calculated Rays

$P(NP \times NR, N^2)$



Projection Matrix

$Q(N^2)$

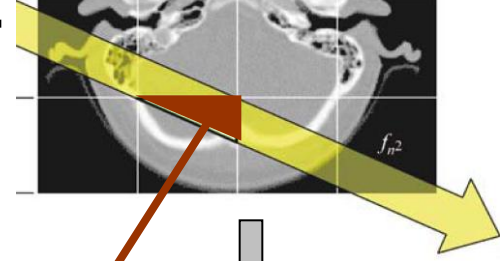


Reconstructed
Matrix

=

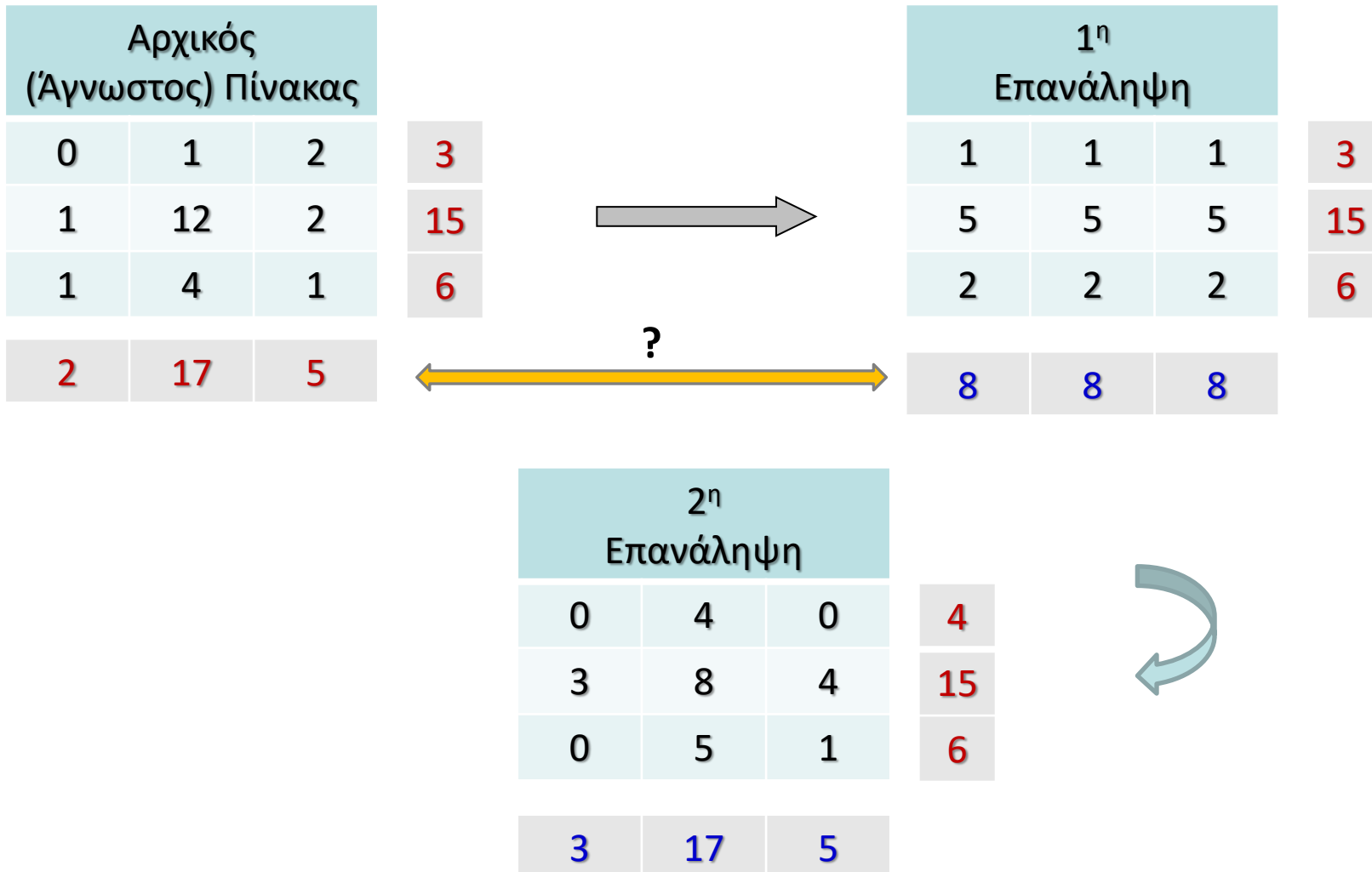
×

R_i



ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Αρχή της Επαναληπτικής Αλγεβρικής Τεχνικής



ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

Algebraic Reconstruction Technique (ART)

Iterative solution of the linear system of equations

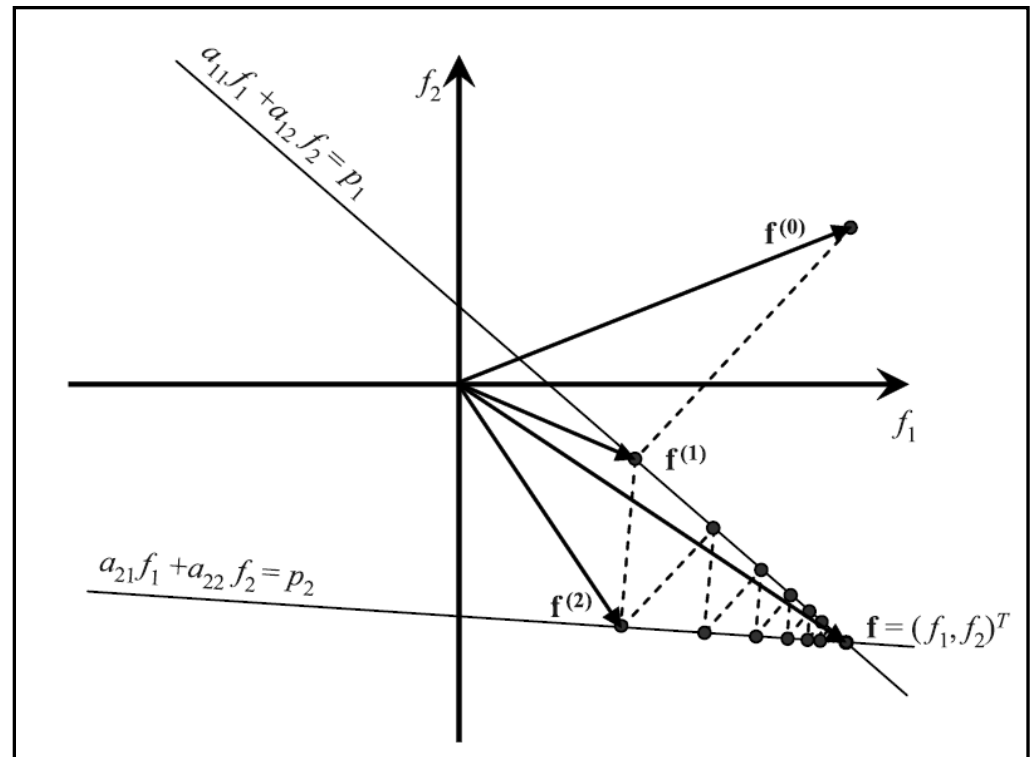
R. Gordon, R. Bender and G.T. Herman: "*Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography*"

Journal of Theoretical Biology 29 (1970) 471–481

Back-Projection

$$Q_j^{k+1} = Q_j^k + \frac{S_i - R_i^k}{\sum_{j=1}^{N^2} P_{ij} P_{ij}} P_{ij}$$

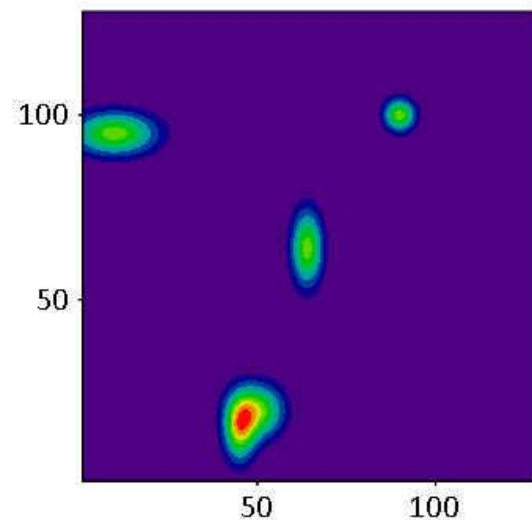
Equivalent graphical solution for the two-dimensional problem as adapted by Rosenfeld and Kak (1982).



ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΤΟΜΟΓΡΑΦΙΑΣ

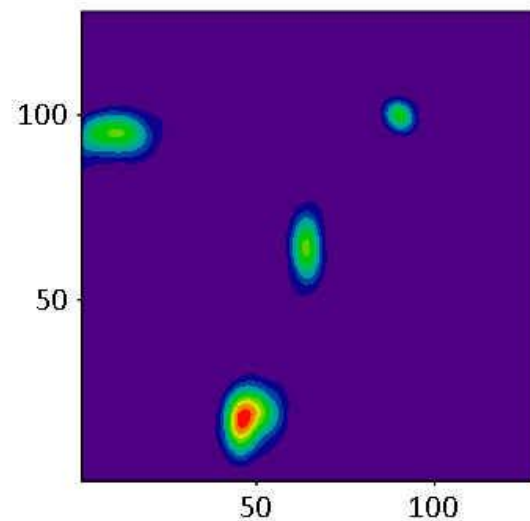
Algebraic Reconstruction Technique (ART)

```
O1 := READPRN("t5.mtx")
```



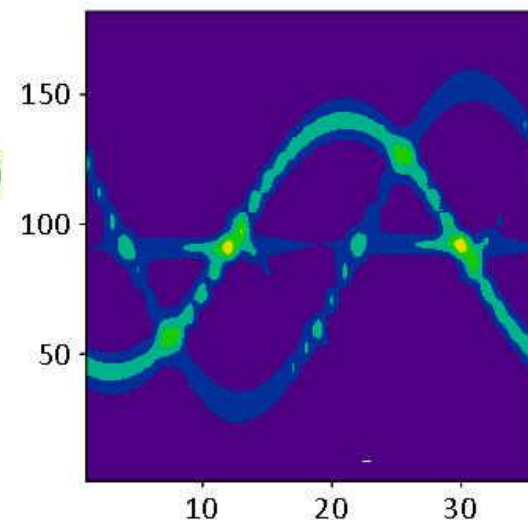
O1

```
RM := READPRN("t5_ART_1.mtx")
```



RM

```
S1 := READPRN("t5.sin")
```

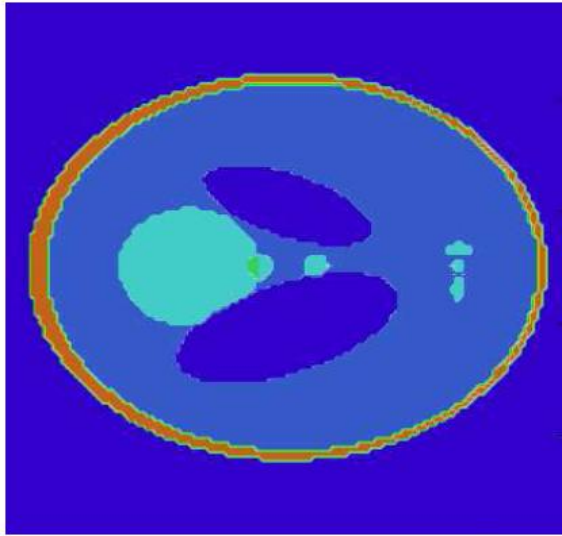


S1

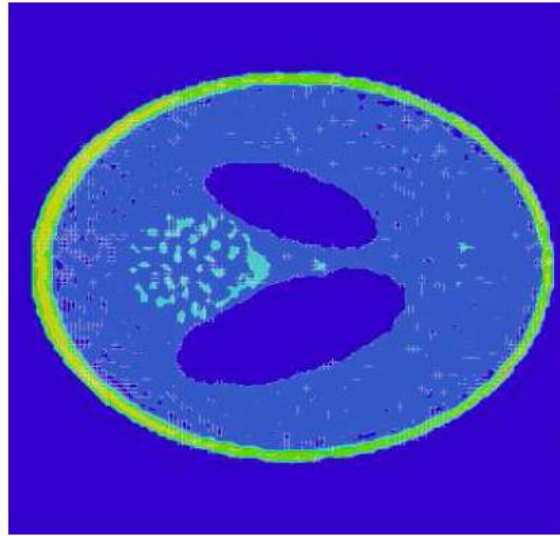
Reconstructed with the Algebraic Reconstruction Technique

COMPUTED TOMOGRAPHY

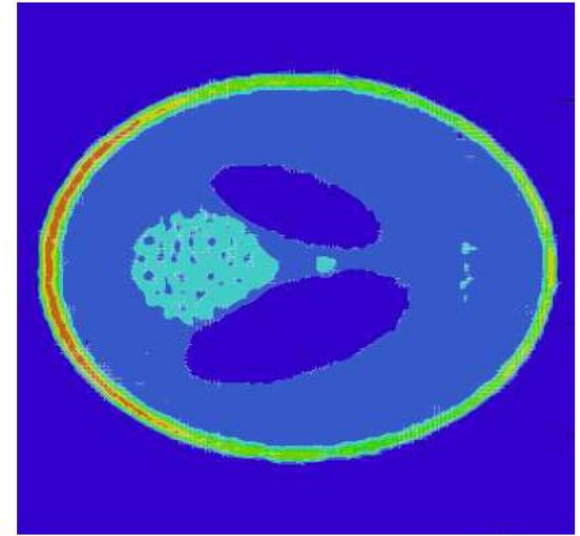
The Shepp-Logan Head Phantom



Original Phantom



Traditional ART



NR-ART + ALL

Matrix Dimension: $N \times N = 128 \times 128$

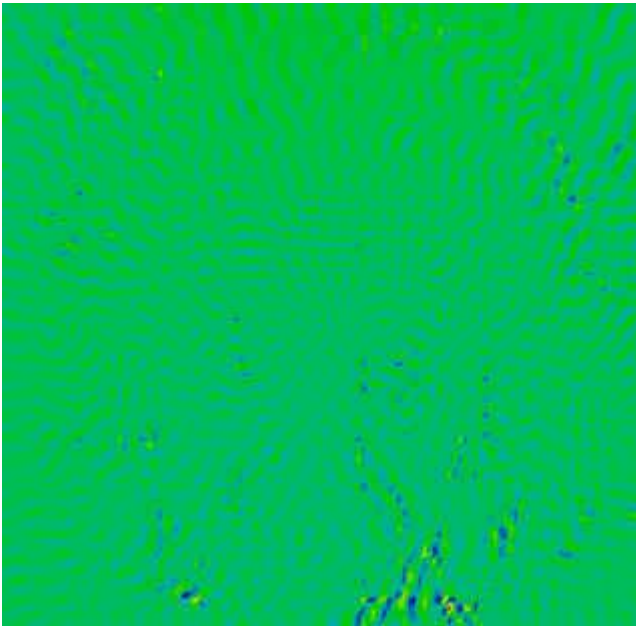
Number of Projections: $NP = 36$ in the angle range $(0^\circ \dots 180^\circ)$

S. Angeli and E. Stiliaris: "An Accelerated Algebraic Reconstruction Technique based on the Newton-Raphson Scheme" IEEE NSS-MIC (2009) 3382-3387

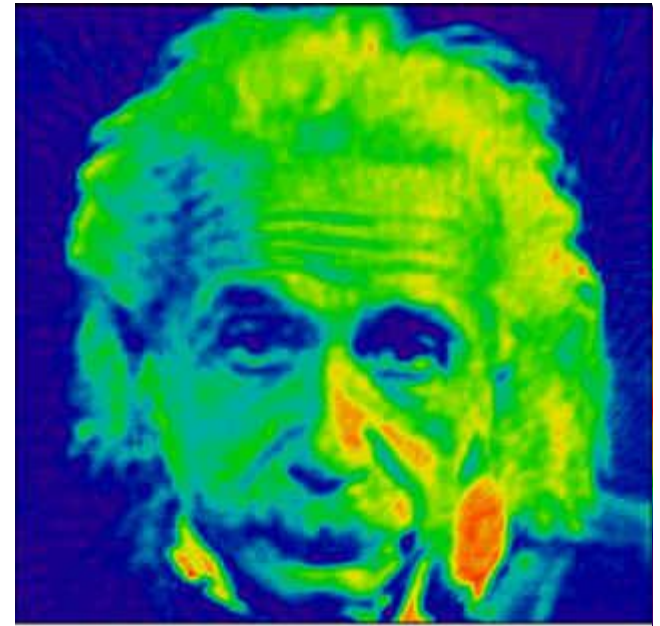
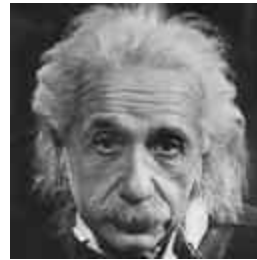
COMPUTED TOMOGRAPHY

Photographic Image Reconstruction!

Number of Projections NP = 72



Difference Matrix



ART-NR Reconstructed
8 Iterations

Reconstruction quality in the case of a photographic image (128×128).

COMPUTED TOMOGRAPHY

Ανατομικά Επίπεδα

Frontal / Coronal Plane

Μετωπιαίο / Στεφανιαίο Επίπεδο

A: Anterior – Πρόσθιο Μέρος

P: Posterior – Οπίσθιο Μέρος

Transverse Plane

Εγκάρσιο (Οριζόντιο) Επίπεδο

S: Superior – Ανώτερο Μέρος

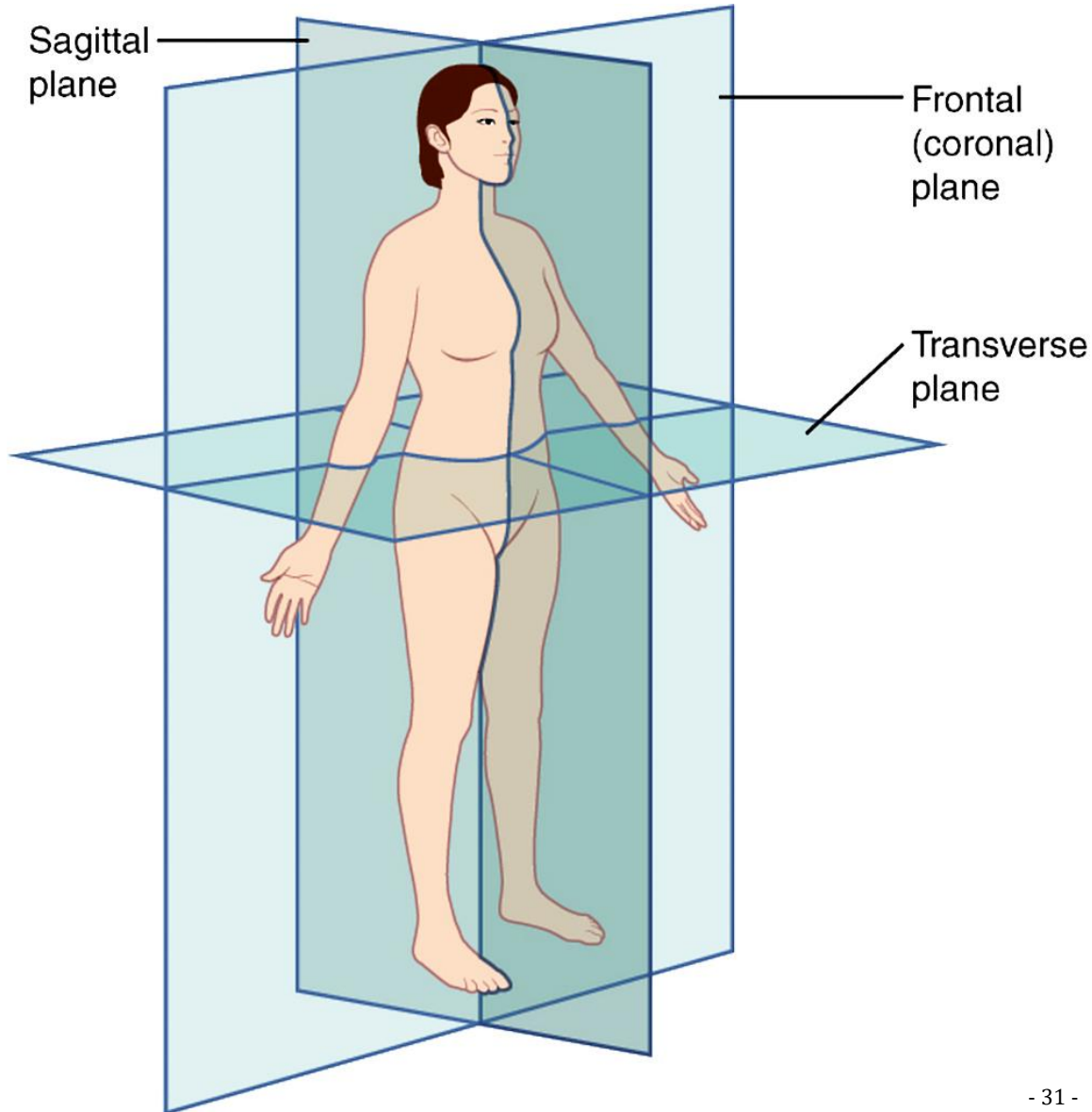
I: Inferior – Κατώτερο Μέρος

Sagittal Plane

Οβελιαίο Επίπεδο

L: Left – Αριστερό Μέρος

R: Right – Δεξιό Μέρος



COMPUTED TOMOGRAPHY

Ανατομικά Επίπεδα

Frontal / Coronal Plane

Μετωπιαίο / Στεφανιαίο Επίπεδο

A: Anterior – Πρόσθιο Μέρος

P: Posterior – Οπίσθιο Μέρος

Transverse Plane

Εγκάρσιο (Οριζόντιο) Επίπεδο

S: Superior – Ανώτερο Μέρος

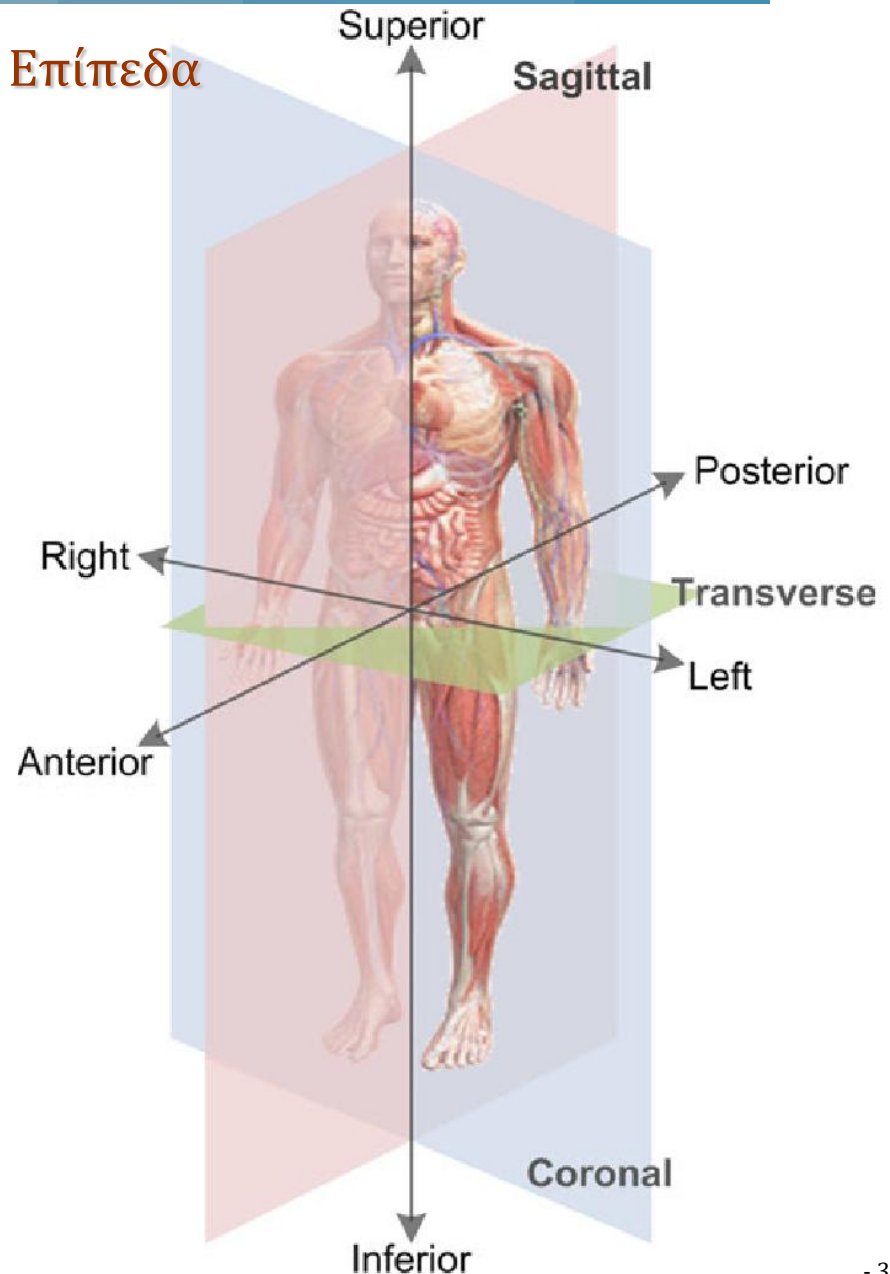
I: Inferior – Κατώτερο Μέρος

Sagittal Plane

Οβελιαίο Επίπεδο

L: Left – Αριστερό Μέρος

R: Right – Δεξιό Μέρος



COMPUTED TOMOGRAPHY

Sagittal

S

A

P

I

Frontal

S

R

L

I

Transverse

R

L

P

Παράδειγμα
προβολής στα τρία
ανατομικά επίπεδα
τομογραφικής
λήψης με ακτίνες X
(X-Ray CT)

A = Anterior
P = Posterior
S = Superior
I = Inferior
R = Right
L = Left