

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Αλληλεπίδραση φωτονίων και φορτισμένων σωματιδίων με την ύλη

1. Ο μαζικός συντελεστής απορρόφησης του Αλουμινίου (Al) για φωτόνια ενέργειας 100 keV είναι $\mu_p(\text{Al}) = 0.17 \text{ cm}^2/\text{g}$. Τι ποσοστό λεπτής δέσμης 100 keV φωτονίων διέρχεται από φύλλο Al πάχους 2 cm; Η πυκνότητα του Αλουμινίου είναι $\rho_{\text{Al}} = 2.7 \text{ g/cm}^3$.

2. Εάν στο προηγούμενο ερώτημα χρησιμοποιηθεί φύλλο Μολύβδου (Pb) με μαζικό συντελεστή απορρόφησης $\mu_p(\text{Pb}) = 5.46 \text{ cm}^2/\text{g}$, πόσο πρέπει να είναι το πάχος του φύλλου Pb ώστε να έχουμε την ίδια απορρόφηση για τα φωτόνια των 100 keV; Η πυκνότητα του Μολύβδου είναι $\rho_{\text{Pb}} = 11.4 \text{ g/cm}^3$.

3. Η κατά Compton ενέργεια σκεδαζόμενου φωτονίου σε γωνία θ δίνεται από τη σχέση:

$$E(\theta) = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{m_e c^2} (1 - \cos\theta)}$$

Για δοσμένη ενέργεια E_0 , σε ποιά γωνία η ενέργεια σκεδαζόμενου φωτονίου και ηλεκτρονίου γίνονται ίσες; Ποιά είναι η γωνία αυτή όταν $E_0 = 511 \text{ keV}$, $E_0 = 1022 \text{ keV}$ και $E_0 = 140 \text{ keV}$;

4. (Γενίκευση της Α3) Φωτόνια ενέργειας E_0 υφίστανται Compton σκέδαση. Να υπολογισθεί η γωνία σκέδασης θ όπου τα σκεδαζόμενα φωτόνια έχουν ενέργεια ίση με το μισό της αρχικής. Να αποδοθεί γραφικά το αποτέλεσμα σε διάγραμμα (θ , E_0).

5. Αποδείξτε πως, ασχέτως της αρχικής ενέργειας, φωτόνιο σκεδαζόμενο κατά Compton σε γωνία μεγαλύτερη των 60° είναι αδύνατον να δημιουργήσει φαινόμενο διδύμου γένεσης.

6. Ένα ανομοιογενές υλικό παρουσιάζει σε συγκεκριμένη ακτινοβολία έναν γραμμικό συντελεστή απορρόφησης που δίνεται από τη σχέση $\mu(x) = 2\lambda x$, όπου λ θετική σταθερά. Εάν είναι γνωστό πως πάχος D του υλικού αυτού υποδιπλασιάζει την ένταση προσπίπτουσας ακτινοβολίας, τι ποσοστό της ακτινοβολίας εξέρχεται όταν το πάχος του υλικού γίνει $2D$ (διπλασιαστεί);

7. Δύο διαφορετικά υλικά (1) και (2) με μαζικούς συντελεστές απορρόφησης μ_{p1} και μ_{p2} αντίστοιχα χρησιμοποιούνται υπό μορφή ορθογώνιων πλακών σε θωράκιση γ -ακτινοβολίας. Εάν έχουν την ίδια επιφάνεια και επιφέρουν το ίδιο ποσοστό απορρόφησης, ποιος είναι ο λόγος των μαζών m_1/m_2 των δύο αυτών πλακών;

8. Να εξεταστεί εάν φορτισμένο σωματίδιο αρχικής ενέργειας $E_0 = 5 \text{ MeV}$ μπορεί να διέλθει από υλικό πάχους 4 cm , εάν η αλληλεπίδρασή του με το υλικό αυτό προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη γραμμική ανασχετική ισχύ που δίνεται από τη σχέση

$$S(E) = -dE/dx = 2 E^{-1} ,$$

όταν η ενέργεια E μετράται σε MeV και η διαδρομή x σε cm .

- Στην περίπτωση που διέρχεται, να υπολογιστεί η εναπομένουσα ενέργεια του σωματιδίου.

- Στην περίπτωση που δεν διέρχεται, να βρεθεί η διαδρομή (εμβέλεια) R που διανύει εντός του υλικού.

9. Σωματίδιο α αρχικής ενέργειας $E_0 = 5.5 \text{ MeV}$ εκπέμπεται από σημειακή πηγή ^{241}Am στον αέρα. Η αλληλεπίδρασή του με τα μόρια του αέρα προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη σχέση που δίνει την γραμμική ανασχετική ισχύ

$$S(E) = -\frac{dE}{dx} = \frac{\lambda}{\sqrt{E}}$$

όταν η ενέργεια E μετράται σε MeV και η διαδρομή x σε cm . Να υπολογιστεί ο συντελεστής λ , εάν γνωρίζουμε πως 4 cm αέρα είναι ικανά να σταματήσουν την ακτινοβολία αυτή.

10. Ποιος πρέπει να είναι ο λόγος ενεργειών δύο διαφορετικών δεσμών πρωτονίων p και σωματιδίων α (πυρήνων ^4He) ώστε να έχουν την ίδια εμβέλεια σε δοσμένο υλικό;

11. Φορτισμένο σωματίδιο αρχικής ενέργειας E_0 καταφέρνει οριακά να διαπεράσει υλικό πάχους D . Εάν η αλληλεπίδρασή του με το υλικό προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη σχέση της γραμμικής ανασχετικής ισχύος

$$S(E) = -dE/dx = 2E^{-1/2} ,$$

να υπολογιστεί η τιμή της ελάχιστης ενέργειας E που απαιτείται, ώστε το ίδιο φορτισμένο σωματίδιο να διαπεράσει υλικό διπλάσιου πάχους $2D$.

X-Ray CT - Γενικές Έννοιες Τομογραφίας

12. Το διακριτό φάσμα λυχνίας ακτίνων-X παρουσιάζει τις χαρακτηριστικές γραμμές K_α και K_β αντίστοιχα στις ενέργειες $K_\alpha = 60$ keV και $K_\beta = 73$ keV. Οι γραμμές αυτές εξαφανίζονται όταν η ανοδική τάση γίνει μικρότερη των 78 kV. Να υπολογισθούν οι ενέργειες σύνδεσης των ηλεκτρονίων του ανοδικού στοιχείου της λυχνίας στις πρώτες στοιβάδες K, L και M.

13. Άγνωστο αντικείμενο διαστάσεων 5×5 με συντελεστές απορρόφησης περιγραφόμενους από τον τετραγωνικό πίνακα $f(i,j)$ του παρακάτω σχήματος, υποβάλλεται σε τομογραφική ανάλυση ακτίνων X.

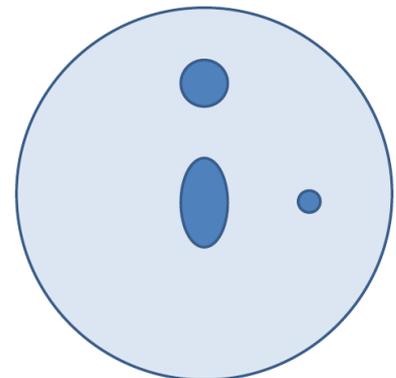
ΑΓΝΩΣΤΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ
 $f(i,j)$

0	4	30	6	0	40	$P(\theta=90^\circ)$
0	12	100	18	0	130	
0	4	10	6	0	20	
0	0	10	0	0	10	
0	0	0	0	0	0	
$P(\theta=0^\circ)$					0	
0	20	150	30	0		

Εάν οι δύο προβολικές μετρήσεις $P(\theta)$ για τις γωνίες $\theta=0^\circ$ και $\theta=90^\circ$ παρουσιάζουν τις αναγραφόμενες τιμές, να γίνει ανασύσταση του πίνακα $f(i,j)$ με τη μέθοδο της οπισθοπροβολής. Πλησιάζει η ευρεθείσα κατανομή των συντελεστών απορρόφησης την πραγματική;

14. Εάν στο προηγούμενο πρόβλημα εφαρμόσετε την **Αλγεβρική Μέθοδο Ανακατασκευής** (Algebraic Reconstruction Technique - ART) για μια πλήρη επανάληψη, ποιό θα είναι το αποτέλεσμα. Σχολιάστε τη διαφορά. Υπάρχει δυνατότητα βελτίωσης και με ποιον τρόπο;

15. Να αποδοθεί το αναμενόμενο ημιτονόγραμμα (sinogram) σε τομογραφία εκπομπής για γωνίες $0^\circ < \phi < 360^\circ$ του ομοιώματος που απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα, εάν υποθεθεί πως οι σκιασμένες περιοχές αποτελούν ομοιόμορφη κατανομή ραδιοφαρμάκου.



Απεικονιστικές Τεχνικές SPECT και PET

16. Υπολογίστε την γεωμετρική διαπερατότητα μολύβδινου κατευθυντήρα σε συσκευή γ-Camera με παράλληλες κυλινδρικές οπές διαμέτρου D και septum S ίσου με τη μισή διάμετρο της οπής ($S=1/2D$).

17. Σε συσκευή γ-Camera ο κατευθυντήρας αποτελείται από τετραγωνικές οπές πλευράς D με septum S . Εάν οι τετραγωνικές οπές αντικατασταθούν με κυκλικές της ίδιας διαμέτρου D , πώς πρέπει να τροποποιηθεί το septum S ώστε να διατηρηθεί η γεωμετρική διαπερατότητα του κατευθυντήρα; Τι συμβαίνει με τον αριθμό των οπών;

18. Κατευθυντήρας συσκευής γ-Camera πάχους $T=40\text{mm}$ αποτελείται από παράλληλες κυκλικές οπές διαμέτρου $D=1\text{mm}$. Σε ποια μέγιστη απόσταση από τη μετώπη του κατευθυντήρα δύο σημειακές πηγές που απέχουν μεταξύ τους $d=20\text{mm}$ γίνονται διακρίσιμες από το ανιχνευτικό σύστημα, το οποίο βρίσκεται σε επαφή με τον εν λόγω κατευθυντήρα;

19. Πώς προσδιορίζεται η θέση προσπίπτοντος φωτονίου σε σύστημα γ-Camera με την μέθοδο Anger (κέντρου βάρους); Εάν η ένταση του μετρούμενου σήματος σε N διακριτοποιημένα σημεία κατά συγκεκριμένο άξονα δίνεται από τη σχέση

$$Q_i = (1+i) \cdot Q_0, \quad i \in \{1,2,\dots,N\}, \quad Q_0: \text{σταθερά}$$

ποια η θέση του φωτονίου στην κατεύθυνση αυτή για $N = 8$;

20. Ποιος από τους παρακάτω ποζιτρονικούς ιχνηθέτες στην τομογραφία PET δίνει την καλύτερη ευκρίνεια θέσης και γιατί; Θεωρείστε ίδιες συνθήκες περιβάλλοντος ιστού και απόδοσης της συσκευής.

^{11}C	^{15}O	^{18}F	^{82}Rb
$E(\beta^+)_{\max} = 970 \text{ keV}$	$E(\beta^+)_{\max} = 1720 \text{ keV}$	$E(\beta^+)_{\max} = 635 \text{ keV}$	$E(\beta^+)_{\max} = 3180 \text{ keV}$

21. Σε ποζιτρονικό τομογράφο PET, ο κυκλικός ανιχνευτικός δακτύλιος αποτελείται από 36 τμήματα (σε κυκλικούς τομείς των 10°) και οι οποίοι είναι αριθμημένοι από το 1 έως το 36.

1. Ποιο από τα παρακάτω γεγονότα σε ταυτοχρονισμό έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα να είναι πραγματικό γεγονός εξαΰλωσης (οι αριθμοί προσδιορίζουν τον ανιχνευτή):

$$(\alpha) (\gamma_1, \gamma_2) = (3, 11) \qquad (\beta) (\gamma_1, \gamma_2) = (13, 18) \qquad (\gamma) (\gamma_1, \gamma_2) = (5, 24)$$

2. Ποια είναι η κατεύθυνση της ευθείας απόκρισης (Line of Response, LoR) για το επικρατέστερο πραγματικό γεγονός;

3. Εάν η συσκευή αυτή διαθέτει επιπρόσθετα μέτρηση χρόνου πτήσης (Time of Flight, ToF), πώς διαμορφώνεται η προηγούμενη απάντηση, εάν η καταμετρούμενη διαφορά χρόνου καταγραφής των δύο φωτονίων είναι $\Delta T_{12} = T_1 - T_2 = (240 \pm 30) \text{ ps}$?