ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ (ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ)

30 Οκτωβρίου 2022

Τετραδόνια και εφαρμογές στη σύγχρονη Φυσική

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω τα τετραδόνια $Q = (a_1, U_1)$, $Y = (a_2, U_2)$.

1. Να δείξετε ότι:
$$[X, Y] = (0, 2(U_1 \times U_2))$$
όπου $[X, Y]$ ο μεταθέτης $XY - YX$.

2. Αν τα X, Y είναι καθαρά τετραδόνια ($a_1 = a_2 = 0$) να δείξετε ότι:
$$\{X, Y\} = -2(U_1 \cdot U_2)\mathbf{1}$$
όπου $\{X, Y\}$ ο αντιμεταθέτης $XY + YX$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω η απεικόνιση: $\rho_{Y,Z} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ της μορφής $X \to YXZ$ με Y, $Z \in \mathbb{H}$ και $N[Y]N[Z] = 1$. Με $\mathbb{H}$ συμβολίζουμε τον χώρο των τετραδονίων ενώ με $N[X]$ συμβολίζουμε το μέτρο του τετραδονίου X. Έστω επίσης ότι για $Z = Y^{-1}$ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό: $\rho_{Y,Y^{-1}} \equiv \rho_Y$.

1. Δείξτε ότι: $\forall X, Y \in \mathbb{H} : \rho_Z(X + Y) = \rho_Z(X) + \rho_Z(Y)$ και $\rho_Z(XY) = \rho_Z(X)\rho_Z(Y)$.

2. Έστω $Z = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ τετραδόνιο με $N[Z] = 1$. Δείξτε ότι μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως:
$$Z = \cos\frac{\theta}{2}\mathbf{1} + i\sin\frac{\theta}{2}\left(\beta\sigma_3 + \gamma\sigma_2 + \delta\sigma_1\right)$$
και προσδιορίστε τα $\theta, \beta, \gamma, \delta$ συναρτήσει των a, b, c και d.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ διάνυσμα του $\mathbf{R}^3$ και $Q = (0, x_1, x_2, x_3)$ ένα καθαρό τετραδόνιο (με μηδενική βαθμωτή συνιστώσα) που έχει σαν ανυσματική συνιστώσα το $\vec{x}$.

1. Δείξτε ότι αν $R = (w, v_1, v_2, v_3)$ είναι ένα μοναδιαίο τετραδόνιο τέτοιο ώστε $RR_c = R_cR = 1$ όπου R_c το συζυγές του R, τότε το γινόμενο RQR_c είναι ένα αμιγώς φανταστικό τετραδόνιο του οποίου η μιγαδική συνιστώσα δίνεται ως:

   $$(w^2 - \vec{v} \cdot \vec{v})\vec{x} + 2\left(w(\vec{v} \times \vec{x}) + (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v}\right)$$

   όπου $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

2. Κατόπιν δείξτε ότι μια $SO(3)$ στροφή του $\vec{x}$ κατά γωνία θ γύρω από άξονα στη διεύθυνση $\vec{n}$ μπορεί να γραφεί ως: $Q' = RQR_c$ όπου $Q = (0, \vec{x})$, $Q' = (0, \vec{x}')$ και R το τετραδόνιο: $R = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\vec{n})$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Η γενικότερη κίνηση ενός στερεού σώματος είναι συνδυασμός μεταφοράς και περιστροφής. Μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας τετραδόνια ως:

$$Q'(t) = S(t) + R(t)Q(t)R_c(t)$$

με $R(t)R_c(t) = R_c(t)R(t) = 1$ και $S(t)$ αντιστοιχεί στη μεταφορά. Τα Q είναι συντεταγμένες ως προς σύστημα αναφοράς ¨καρφιτσωμένο' στο στερεό σώμα και Q' συντεταγμένες ως προς σταθερό αδρανειακό σύστημα. Διατυπώστε το νόμο του Νεύτωνα για τη δυναμική του συστήματος αυτού υπολογίζοντας το $\frac{d^2Q'}{dt^2}$. Δώστε φυσική ερμηνεία στους εμφανιζόμενους όρους.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ως μιγαδικό τετραδόνιο ορίζεται το:

$$\mathbf{Q} = a + e_1b_1 + e_2b_2 + e_3b_3$$

όπου τα $a = a_R + ia_I$, $b_j = b_{j,R} + ib_{j,I}$, με $j = 1, 2, 3$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Το φανταστικό μοναδιαίο i θεωρούμε ότι μετατίθεται με τα e_j. Οι ιδιότητες πολλαπλασιασμού των μιγαδικών τετραδονίων είναι οι ίδιες με αυτές των συνήθων ενώ το συζυγές ενός μιγαδικού τετραδονίου δίνεται ως:

$$\bar{\mathbf{Q}} = a - e_1 b_1 - e_2 b_2 - e_3 b_3$$

1. Δείξτε ότι ένα μιγαδικό τετραδόνιο μηδενικού μέτρου (μη τετριμμένο όμως) μπορεί να γραφεί μονοσήμαντα ως:

   $$\mathbf{Q} = (1 + i(e_1 n_1 + e_2 n_2 + e_3 n_3))\mathbf{P}$$

   όπου $\mathbf{P}$ είναι πραγματικό τετραδόνιο και $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ είναι μοναδιαίο άνυσμα του R^3.

2. Δείξτε ότι οι στροφές στον χωρόχρονο Minkowski μπορούν να γραφούν ως μιγαδικά τετραδόνια της μορφής:

   $$\mathbf{R} = e^{(e_1 n_1 + e_2 n_2 + e_3 n_3)\frac{\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + \sum_{i=1}^{3} e_i n_i \sin\frac{\theta}{2}$$

   όπου θ και n_i $(i = 1, 2, 3)$ μιγαδικά.