ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

1. Να λύσετε το πρόβλημα $\frac{d^2}{dx^2}G(x,x') = -\delta(x-x')$, $G(0,x') = \frac{d}{dx}G(x,x')\Big|_{x=l} = 0$.

2. Χρησιμοποιώντας αποκλειστικά το προηγούμενο αποτέλεσμα να λύσετε το πρόβλημα : $\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = -f(x)$, $\Psi(0) = a$, $\Psi'(l) = b$

3. Βρείτε τη συνάρτηση $G(x,y)$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{d}{dx}G(x,y) + \lambda G(x,y) = \delta(x-y)$ και η οποία μηδενίζεται όταν $x < y$. Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση αυτή για να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{d}{dx}f(x) + \lambda f(x) = \mu, \quad f(0) = 0.$$

Επιβεβαιώστε ότι το αποτέλεσμά σας συμπίπτει με αυτό του συνήθους τρόπου επίλυσης. ($0 \le x < \infty$, $0 \le y < \infty$)

4. Να λύσετε το πρόβλημα

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + m^2\right)G(x,y) = -\delta(x-y) \ , \quad G(0,y) = G(l,y) = 0$$

(α) Με απευθείας κατασκευή από την εξίσωση.

(β) Μέσω των ιδιοσυναρτήσεων του διαφορικού τελεστή.

5. Ας πούμε ότι θέλετε να λύσετε το πρόβλημα

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x), \quad \phi_n(0) = \phi_n(l) = 0,$$

αλλά δεν είστε αρκετά " έξυπνοι" ώστε να δείτε αμέσως ότι $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\frac{n\pi}{l}x)$ και ότι $\lambda_n = -(\frac{n\pi}{l})^2$. Μπορείτε να βρείτε την απάντηση με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) του προηγούμενου προβλήματος ;

6.Λύστε το πρόβλημα $(\frac{d^2}{dx^2}+m^2)\Psi(x)=-f(x)$, $\Psi(0)=a,\Psi(l)=b$ χρησιμοποιώντας αποκλειστικά και μόνο τη συνάρτηση Green του προβλήματος 4.

7. Είναι προφανές ότι η συνάρτηση Green του προβλήματος 4 δεν μπορεί να κατασκευαστεί όταν $lm=\nu\pi$ όπου ν κάποιος ακέραιος. Κατασκευάστε την αντίστοιχη γενικευμένη συνάρτηση Green.

8.Να λύσετε το πρόβλημα

$$(\frac{d^2}{dx^2}+m^2)G_0(x,y)=-\delta(x-y)$$

σε ένα χώρο χωρίς σύνορα . Στο άπειρο η λύση σας θα πρέπει να έχει τη μορφή εξερχομένου κύματος. Με τη βοήθεια της απάντησης σας να βρείτε τη συνάρτηση Green του προβλήματος 4.

9.Με τη βοήθεια του προηγούμενου προβλήματος και μέσω της τεχνικής των ειδώλων να λύσετε την εξίσωση

$$(\frac{d^2}{dx^2}+m^2)G(x,y)=-\delta(x-y)$$

στην περιοχή $0\leq x<\infty$. Η λύση σας θα πρέπει να μηδενίζεται όταν $x=0,\infty$. Στη συνέχεια επιβεβαιώστε ότι η λύση σας συμπίπτει με αυτή που προκύπτει με απευθείας κατασκευή της συνάρτησης Green.

10.Να λύσετε το πρόβλημα

$$\left[\frac{d}{dr}(r^2\frac{d}{dr})-n(n+1)\right]G(r,r')=-\delta(r-r') \quad , \; G(a,r')=G(b,r')=0\,.$$

(n ακέραιος , $0<a<b<\infty$)

(Απ.: $G(r,r')=\frac{1}{(2n+1)}\frac{1}{\left[1-(\frac{a}{b})^{2n+1}\right]}\left(r_<^n-\frac{a^{2n+1}}{r_<^{n+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{n+1}}-\frac{r_>^n}{b^{2n+1}}\right)$, $r_<\equiv\min(r,r')$, $r_>\equiv\max(r,r')$)

11. Να λύσετε το πρόβλημα :

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = -\delta(x-\frac{1}{2}) + |x-1| \ , \ \ \Psi'(0) = \Psi'(2) = 0$$

(Υπόδειξη: Μπορείτε να κατασκευάσετε πρώτα τη γενικευμένη συνάρτηση Green:

$$\tilde{G}(x,y) = \frac{x^2+y^2}{4} - x\theta(x-y) - y\theta(y-x) + \frac{2}{3} \ )$$

12. Να λύσετε την προηγούμενη διαφορική εξίσωση με συνοριακές συνθήκες

$\Psi(0) = \Psi(2)$ **,** $\Psi'(0) = \Psi'(2)$ (: περιοδικές συνοριακές συνθήκες)

(Υπόδειξη: Μπορείτε και πάλι να χρησιμοποιήσετε την αντίστοιχη γενικευμένη συνάρτηση Green : $\tilde{G}(x,y) = \frac{1}{4}|x-y| \ \left(|x-y|-2\right) + \frac{1}{6}$)

13. Να λύσετε σε δύο διαστάσεις την εξίσωση Green $\vec{\nabla}_r^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$. Η λύση σας θα πρέπει να μηδενίζεται στην περίμετρο ενός τετραγώνου με πλευρά l . Να εκφράσετε τη λύση σας μέσω ενός απλού αθροίσματος.

(Υπόδειξη : $G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{4}{l^2}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{1}{\frac{\pi^2}{l^2}(n_1^2+n_2^2)}\sin(n_1\pi\frac{x}{l})\sin(n_2\pi\frac{y}{l})\cdot$

$$\cdot\sin(n_1\pi\frac{x'}{l})\sin(n_2\pi\frac{y'}{l}) = \frac{2}{l}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sin(n_1\pi\frac{x}{l})\sin(n_2\pi\frac{x'}{l})\, f(y,y',n_1)$$

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} - \left(\frac{n_1\pi}{l}\right)^2\right] f(y,y',n_1) = -\delta(y-y') \Rightarrow f(y,y',n_1) = ...)$$

14. Να βρείτε σε έναν απεριόριστο μονοδιάστατο χώρο τη συνάρτηση Green της εξίσωσης Poisson με την μέθοδο της εμβάπτισης .

(Απάντηση : $G^{(D=1)}(l) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy \ln(\frac{l^2+(y-y')^2}{l_0^2+(y-y')^2}) = -\frac{1}{2}|l| + \frac{1}{2}|l_0|$.

$l = x - x'$, l_0 αυθαίρετη σταθερά.)

15. Σε δύο διαστάσεις να λύσετε την εξίσωση Laplace στην περιοχή $y > 0$. Στον άξονα $y = 0$ η λύση σας πρέπει να παίρνει κάποια καθορισμένη τιμή (όχι κατανάγκη σταθερή).

(Απ.: $\Psi(x, y) = \dfrac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\Psi(x', 0)}{(x - x')^2 + y^2} dx'$)

16. Σε χώρο δύο διαστάσεων ο ημιάξονας $x > 0$ διατηρείται σε δυναμικό 1 και ο ημιάξονας $x < 0$ σε δυναμικό –1. Να βρεθεί το δυναμικό παντού στο επάνω ημιεπίπεδο στο οποίο δεν υπάρχουν φορτία.

17. Σε τρείς διαστάσεις να λύσετε την εξίσωση Laplace στην περιοχή $z > 0$. Στο επίπεδο $z = 0$ η λύση σας παίρνει κάποια καθορισμένη τιμή (όχι , κατανάγκη, σταθερή σ' όλο το επίπεδο) (Απ.: Το πρόβλημα δεν είναι παρά η επέκταση του προβλήματος 15 σε τρείς διαστάσεις. Η απάντηση είναι : $\Psi(x, y, z) = \dfrac{1}{2\pi} z \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \dfrac{\Psi(x', y', 0)}{\left[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}}$)

18. Σε τρείς διαστάσεις θεωρείστε σφαίρα το επάνω ημισφαίριο της οποίας βρίσκεται σε δυναμικό 1 και το κάτω σε δυναμικό -1. Να βρείτε το δυναμικό κατά μήκος του θετικού άξονα z . (Απ.: $\Psi(z) = \dfrac{R}{z} - \dfrac{R^2 - z^2}{z(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}$ (για το εσωτερικό της σφαίρας) και

$\Psi(z) = 1 - \dfrac{z^2 - R^2}{z(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}$ (για το εξωτερικό της σφαίρας))

19. Να λύσετε (σε χώρο 3 διαστάσεων) την εξίσωση Green:

$$(\vec{\nabla}^2 + m^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') .$$

Η λύση σας θα πρέπει να μηδενίζεται επάνω στο επίπεδο $z = 0$

20. Δείξτε ότι η λύση της $[\vec{\nabla} + ig\vec{A}(\vec{r})]^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ μπορεί να γραφεί :

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \exp[-ig \int_{\vec{r}'}^{\vec{r}} d\vec{x} \cdot \vec{A}(\vec{x})]\; G_0(\vec{r}, \vec{r}') \quad \text{όπου} \quad \vec{\nabla}^2 G_0(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') .$$

(Υπ.: Μπορείτε να ξεκινήσετε με την παρατήρηση ότι αν

$\Delta(\vec{r}, \vec{r}') = \exp[ig \int_{\vec{q}}^{\vec{r}} d\vec{x} \cdot \vec{A}(\vec{x})]\; G(\vec{r}, \vec{r}') \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \Delta = \exp[ig \int_{\vec{q}}^{\vec{r}} d\vec{x} \cdot \vec{A}(\vec{x})][\vec{\nabla} + ig\vec{A}]^2\; G(\vec{r}, \vec{r}')$)

21. Έστω $G_R(\vec{r},\vec{r}\,';t-t')$ και $G_A(\vec{r},\vec{r}\,';t-t')$ οι Retarded και Advanced συναρτήσεις Green της κυματικής εξίσωσης. Δείξτε ότι μπορείτε να γράψετε

$$G_R(\vec{r},\vec{r}\,';t-t') = \theta(t-t')K(\vec{r},\vec{r}\,';t-t') \text{ και } G_A(\vec{r},\vec{r}\,';t-t') = -\theta(t'-t)K(\vec{r},\vec{r}\,';t-t')$$

με τη συνάρτηση K (: διαδότης) να είναι η λύση του προβλήματος :

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}_r^2\right)K(\vec{r},\vec{r}\,';t-t') = 0 \ ,$$

$$K(\vec{r},\vec{r}\,';0) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial t}K(\vec{r},\vec{r}\,';t-t')\Big|_{t=t'} = c^2\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

22. Δείξτε ότι σε απεριόριστο χώρο η λύση του προηγουμένου προβλήματος είναι:

$$K_0\left(|\vec{r}-\vec{r}\,'|, t-t'\right) = c\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{\exp\left[-i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}\,')\right]}{|\vec{p}|}\sin\left[c|\vec{p}|(t-t')\right].$$

Δείξτε ότι η αντίστοιχη λύση που αφορά σε πεπερασμένο τμήμα του χώρου είναι:

$$K(\vec{r},\vec{r}\,';t-t') = c^2\sum_n \frac{\sin\left[\omega_n(t-t')\right]}{\omega_n}\phi_n(\vec{r})\phi_n^*(\vec{r}\,')$$

όπου $$\vec{\nabla}^2\phi_n(\vec{r}) = -\frac{\omega_n^2}{c^2}\phi_n(\vec{r})\,.$$

23. Η "γενικευμένη" συνάρτηση Green για την κυματική εξίσωση έχει (όταν και ο χρόνος και ο χώρος είναι απεριόριστοι) την μορφή

$$\tilde{G}_0(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t') = c\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{\exp\left[i(t-t')c\omega - i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}\,')\right]}{\vec{p}^{\,2}-\omega^2}\,.$$

Δείξτε ότι $$G_{0,R} = \tilde{G}_0 + \frac{1}{2}K_0 \quad \text{και} \quad G_{0,A} = \tilde{G}_0 - \frac{1}{2}K_0\,.$$

(Υπ.: Θα διευκολυνθείτε πολύ αν χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα

$$\mathrm{P}\frac{1}{|\vec{p}|-\omega} = \frac{1}{|\vec{p}|-(\omega+i\varepsilon)} - i\pi\delta(|\vec{p}|-\omega) \ )$$

24. Να βρείτε την Retarded συνάρτηση Green της κυματικής εξίσωσης σε χώρο δύο (ή τριών) διαστάσεων. Η συνάρτηση που ψάχνετε θα πρέπει να μηδενίζεται στην περιφέρεια ενός κύκλου με ακτίνα R (ή στην επιφάνεια μιας σφαίρας με ακτίνα R).

(Υπ.: Χρησιμοποιείστε την μέθοδο των ειδώλων.)

25. Δείξτε ότι (για την κυματική εξίσωση)σε απεριόριστο χώρο μιας διάστασης :

$$G_{0,R}(x-x',t-t') = \frac{c}{2}\theta\left[c(t-t') - |x-x'|\right]\theta(t-t')$$

$$G_{0,A}(x-x',t-t') = \frac{c}{2}\theta\left[c(t'-t) - |x-x'|\right]\theta(t'-t) .$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα να το παράξετε με δύο τρόπους :

(α) Μέσω του διαδότη K_0 του προβλήματος 22.

(β) Με την μέθοδο της εμβάπτισης. Με τον υπολογισμό, δηλαδή, του ολκληρώματος

$$G^{(D=1)}_{0,R(A)}(x-x',t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} dy G^{(D=2)}_{0,R(A)}\left[\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}, t-t'\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy G^{(D=3)}_{0,R(A)}\left[\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}, t-t'\right]$$

26. Η (ομογενής) κυματική εξίσωση σε μία χωρική διάσταση είναι :

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi(x,t) = 0 \quad (1)$$

Πιστοποιείστε ότι η $\Psi(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right]$ είναι η λύση της (1) σε απεριόριστο χώρο η οποία υπόκειται σε μη ομογενείς αρχικές συνθήκες $\Psi(x,0) = f(x)$ και $\Psi'(x,0) = 0$ σε ό,τι αφορά στο χρόνο. Με βάση την παρατήρηση αυτή (και μόνο) δείξτε ότι η $G_{0,R}$ είναι αυτή που σημειώνεται στην άσκηση 25. (Υπ.: Χρησιμοποιείστε το γεγονός ότι η λύση της (1) μπορεί να βρεθεί από την

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} dx' G_{0,R}(x-x';t) f(x')) .$$