ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής Φυσικής
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων,
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Αθήνα, 15784

Ολοκληρώματα

Περιεχόμενα

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με χρήση συμμετριών

Στη Φυσική πολλές φορές εμφανίζονται ολοκληρώματα τα οποία μπορούν να απλοποιηθούν με χρήση συμμετριών.

Παράδειγμα 1ο: θεωρούμε ολοκληρώματα της μορφής

$$I_{ij}(k) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}\ f(r;k)x_i x_j\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, 3\ , \tag{1}$$

όπου $\mathbf{k}$ σταθερό διάνυσμα και r το μέτρο του $\mathbf{x}$.

- Αναγκαστικά
$$I_{ij}(k) = F(k)k_i k_j\ .$$
- Πολλαπλασιάζοντας με δ_{ij} και αθροίζοντας στα i, j
$$F(k) = \frac{1}{k^2}\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x}\ f(r;k)r^2 = \frac{4\pi}{k^2}\int_0^\infty dr\ r^4 f(r;k)\ ,$$
όπου χρησιμοποίησα ότι $d^3\mathbf{x} = d\Omega dr r^2$, σε σφαιρικές συντεταγμένες. Το (2) είναι ένα μονοδιάστατο ολοκλήρωμα, ευκολότερο να υπολογισθεί.

Παράδειγμα 2ο: Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα συμμετρίας θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} I_i &= \int d\Omega \; n_i \;, \\ I_{ij} &= \int d\Omega \; n_i n_j \;, \\ I_{ijk} &= \int d\Omega \; n_i n_j n_k \;, \\ I_{ijkl} &= \int d\Omega \; n_i n_j n_k n_l \;, \end{aligned} \tag{2}$$

όπου $n_i = x_i/r$, $i = 1, 2, 3$ είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος

$$n_1 = \sin\theta\cos\phi \;, \quad n_2 = \sin\theta\sin\phi \;, \quad n_3 = \cos\theta \tag{3}$$

και $d\Omega = d\phi d\theta \sin\theta$ η στερεά γωνία.

- Λόγω συμμετρίας αρτιότητας (σε κάθε άξονα ξεχωριστά) έχουμε ότι

$$I_i = \int d\Omega \; n_i = 0 \;, \qquad I_{ijk} = \int d\Omega \; n_i n_j n_k = 0 \;. \tag{4}$$

- Λόγω συμμετρίας αρτιότητας ως προς κάθε άξονα ξεχωριστά έχουμε ότι $I_{ij} = A\delta_{ij}$. Πολλαπλασιάζουμε με δ_{ij} και αθροίζουμε τους δείκτες, οπότε $3A = \int d\Omega = 4\pi$. Άρα

$$I_{ij} = \int d\Omega\ n_i n_j = \frac{4\pi}{3}\delta_{ij}\ . \tag{5}$$

- Λόγω συμμετρίας κατόπιν εναλλαγής οποιωνδήποτε δύο δεικτών έχουμε

$$I_{ijkl} = B(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{kj}\delta_{il} + \delta_{lj}\delta_{ki})\ .$$

Πολλαπλασιάζοντας με δ_{ij} και αθροίζοντας ως προς i, j

$$\delta_{ij} I_{ijkl} = \int d\Omega\ n_k n_l = \frac{4\pi}{3}\delta_{kl} = 5B\delta_{kl}\ ,$$

οπότε $B = 4\pi/15$. Άρα

$$I_{ijkl} = \int d\Omega\ n_i n_j n_k n_l = \frac{4\pi}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{kj}\delta_{il} + \delta_{lj}\delta_{ki})\ . \tag{6}$$

Στη γενική περίπτωση έχουμε το ολοκλήρωμα

$$J_{i_1 i_2 \ldots i_N} = \int d\Omega \; n_{i_1} n_{i_2} \cdots n_{i_N} \; . \tag{7}$$

Αν N είναι περιττό τότε είναι μηδέν λόγω αρτιότητας.

- Γενικά λόγω συμμετρίας λόγω εναλλαγής δύο δεικτών οποιωνδήποτε έχουμε

$$J_{i_1 i_2 \ldots i_{2N}} = A_N (\delta_{i_1,i_2} \delta_{i_3,i_4} \ldots \delta_{i_{2N-1},i_{2N}} + \cdots) \; , \tag{8}$$

  όπου με τις τελείες υπονοούμε όλους τους δυνατούς όρους εναλλαγής των i_m και i_n.

- Αν εκλέξουμε $i_m = 3$, $\forall \; m = 1, 2, \ldots, 2N$, έχουμε

$$\begin{aligned} J_{\underbrace{33\ldots3}_{2N}} &= \int d\Omega \; \cos^{2N}\theta = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \; \sin\theta \cos^{2N}\theta \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} dx \; x^{2N} = \frac{4\pi}{2N+1} \; . \end{aligned}$$

- Αλλά
$$J_{\underbrace{33\ldots3}_{2N}} = A_N B_N \ ,$$
όπου B_N είναι ο αριθμός N διακριτών ζευγών που μπορούμε να φτιάξουμε με $2N$ αντικείμενα.
- Ισχύουν η αναδρομική και οριακή σχέση
$$B_{N+1} = B_N + 2NB_N = (2N+1)B_N \ , \qquad B_1 = 1 \ ,$$
με λύση
$$B_N = (2N-1)!! \ .$$
- Άρα
$$\frac{4\pi}{2N+1} = A_N(2N-1)!! \quad \Longrightarrow \quad A_N = \frac{4\pi}{(2N+1)!!} \ .$$

Παράδειγμα 3ο: Θα δείξουμε ότι η σφαίρα S^n μοναδιαίας ακτίνας στον $\mathbb{R}^{n+1}$

$$S^n : \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1 \ , \tag{9}$$

έχει όγκο

$$V_{S^n} = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \ . \tag{10}$$

Ειδικά

$$V_{S^1} = 2\pi \ , \quad V_{S^2} = 4\pi \ , \quad V_{S^3} = 2\pi^2 \ , \quad V_{S^4} = 8\pi^2/3 \ , \quad V_{S^5} = \pi^3 \ .$$

Επίσης:

- Ο όγκος της $V_{S^{-1}}$ πρέπει ναι είναι μηδέν. Πράγματι

$$V_{S^{n-1}} \to n \ , \quad n \to 0 \ .$$

- Επίσης

$$V_{S^0} = 2 \ .$$

  Η S^0 είναι το όριο ευθύγραμμου τμήματος. Το όριο αυτό αποτελείται από 2 σημεία όσα και ο όγκος της S^0!

Απόδειξη: Ας ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση

$$f(r) = e^{-x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n+1}^2} = e^{-r^2} \ , \tag{11}$$

σε όλο το χώρο $\mathbb{R}^{n+1}$. Ο στοιχειώδης όγκος είναι

$$dV_{n+1} = dx_1 dx_2 \ldots dx_{n+1} = dV_{S^n} \ dr r^n \ . \tag{12}$$

- Άρα, σε Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} dV_{n+1} f(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n+1} \ e^{-x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n+1}^2} \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \ e^{-x^2} \right]^{n+1} = \pi^{\frac{n+1}{2}} \ , \end{aligned} \tag{13}$$

όπου χρησιμοποίησα ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \ e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \ .$$

- Σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} dV_{n+1} f(r) &= V_{S^n} \int_0^\infty dr\ r^n e^{-r^2} \\ &= \frac{1}{2} V_{S^n} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) . \end{aligned} \tag{14}$$

- Εξισώνοντας τις (13) και (14) βρίσκουμε την (10).

Μια χρήσιμη σχέση είναι η

$$dV_{S^n} = \sin^{n-1}\theta\ dV_{S^{n-1}} . \tag{15}$$

Για να δείξουμε ότι ισχύει ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της

$$\begin{aligned} V_{S^n} &= V_{S^{n-1}} \int_0^\pi d\theta\ \sin^{n-1}\theta \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} , \end{aligned}$$

που ισχύει. Οι λεπτομέριες αφήνονται ως [Άσκηση].

Παράδειγμα 4ο: Η σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας B^{n+1} που περιλαμβάνεται από την S^n

$$B^{n+1}: \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1 \ , \tag{16}$$

έχει όγκο

$$V_{B^{n+1}} = V_{S^n} \int_0^1 dr\ r^n = \frac{V_{S^n}}{n+1} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2}+1)} \ . \tag{17}$$

Ειδικά,

$$V_{B^2} = \pi \ , \quad V_{B^3} = 4\pi/3 \ , \quad V_{B^4} = \pi^2/2 \ , \quad V_{B^5} = 8\pi^2/15 \ .$$

Επίσης

- Η B^0 είναι ένα σημείο και αυτό δίνεται απ΄ τον όγκος της

$$V_{B^0} = 1 \ .$$

- Ο όγκος της B^1 είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $x \in [-1, 1]$

$$V_{B^1} = 2 \ .$$

Παράδειγμα 5ο: Το ολοκλήρωμα

$$J_{i_1 i_2 \ldots i_N} = \int dV_{S^n} \; n_{i_1} n_{i_2} \cdots n_{i_N} \;, \qquad (18)$$

όπου n_i οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος στην S^n είναι μηδέν για N περιττό και

$$J_{i_1 i_2 \ldots i_{2N}} = A_N (\delta_{i_1,i_2}\delta_{i_3,i_4} \ldots \delta_{i_{2N-1},i_{2N}} + \cdots) \;, \qquad (19)$$

όπου με τις τελείες υπονοούμε όλους τους δυνατούς όρους εναλλαγής των i_m και i_n και

$$A_N = \frac{2\pi^{n/2}\Gamma(N+\frac{1}{2})}{\Gamma[(n+1)/2+N](2N-1)!!} \;. \qquad (20)$$

Απόδειξη: Αν εκλέξουμε $i_m = 3$, $\forall\; m = 1, 2, \ldots, 2N$, έχουμε:

- Χρησιμοποιώντας την (15) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} J_{\underbrace{33\ldots3}_{2N}} &= \int dV_{S^n} \; \cos^{2N}\theta = V_{S^{n-1}} \int_0^{\pi} d\theta \; \sin^{n-1}\theta \cos^{2N}\theta \\ &= V_{S^{n-1}} \int_{-1}^{1} dx \; (1-x^2)^{n/2-1} x^{2N} = \frac{2\pi^{n/2}\Gamma(N+\frac{1}{2})}{\Gamma[(n+1)/2+N]} \;. \end{aligned}$$

Οι λεπτομέρειες των ενδιάμεσων βημάτων αφήνονται ως [Άσκηση].

- Αλλά
$$J_{\underbrace{33\ldots3}_{2N}} = A_N B_N \ ,$$
όπου B_N είναι ο αριθμός N διακριτών ζευγών που μπορούμε να φτιάξουμε με $2N$ αντικείμενα.
- Από προηγούμενο παράδειγμα
$$B_N = (2N-1)!! \ .$$
- Άρα
$$\frac{2\pi^{n/2}\Gamma(N+\frac{1}{2})}{\Gamma[(n+1)/2+N]} = A_N(2N-1)!! \ ,$$
απ' όπου υπολογίζουμε την A_N, όπως στην (20).

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων με μεθόδους μιγαδικής ανάλυσης

Η χρήση μεθόδων της μιγαδικής ανάλυσης είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Πρίν την ανάπτυξη των διάφορων μεθόδων χρειάζονται οι ορισμοί:

- Μια συνάρτηση είναι αναλυτική στο σημείο z_0 αν η ανάπτυξη σε δυναμοσειρά στην γειτονιά του σημείου συγκλίνει στην τιμή την συνάρτησης στο σημείο αυτό.
- Ένα σημείο z_0 στο οποίο η συνάρτηση $f(z)$ δεν είναι αναλυτική, αλλά είναι αναλυτική σε γειτονικά σημεία λέγεται απομονωμένο ανώμαλο σημείο.
- Μια συνάρτηση είναι μερομορφική σε μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ αν είναι παντού αναλυτική εκτός από πεπερασμένο αριθμό σημείων.

Θεωρίστε την ανάπτυξη κατά Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ . \qquad (21)$$

Οι συντελεστές a_n δίνονται απ΄ το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \ \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \ ,$$

όπου η C είναι κύκλος που περιλαμβάνει μόνο το z_0.

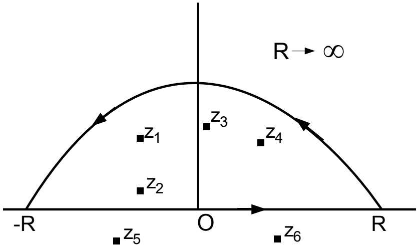
- Το σημείο z_0 θα είναι πόλος τάξης m αν $a_n = 0$ για $n < -m$ και $a_{-m} \neq 0$.
- Αν $a_{-1} \neq 0$ ο πόλος είναι απλός.
- Αν η άθροιση εκτείνεται στο άπειρο ο πόλος είναι μια ουσιώδης ανωμαλία.
- Αν z_0 είναι ένα απομονωμένο ανώμαλο σημείο ο συντελεστής a_{-1} ονομάζεται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z)$ στο z_0.

Ολοκληρώματα στην πραγματική ευθεία

Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\ .$$

Έστω ότι η $f(z)$ με $z \in \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο πάνω μέρος του μιγαδικού επιπέδου, εκτός από πεπερασμένο αριθμό σημείων z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, όπου έχει είτε πόλους είτε ουσιώδεις ανωμαλίες.



Sq ma: Δρόμος ολοκλήρωσης για ολοκληρώματα στην πραγματική ευθεία. Οι εντός της καμπύλης πόλοι είναι στα σημεία z_k, για $k = 1, 2, 3, 4$ και οι εκτός για $k = 5, 6$.

Με χρήση της θεωρίας των ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_C dz\ f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} R_k \ ,$$

όπου R_k τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα εντός ημικυκλίου C μεγάλης ακτίνας $R \to \infty$. Επίσης υποθέσαμε ότι $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, το λιγότερο όσο γρήγορα όσο η $1/|z|^m$, με $m > 1$. Τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} R_k \ . \tag{22}$$

Ολοκληρώματα με τριγωνομετρικές συναρτήσεις

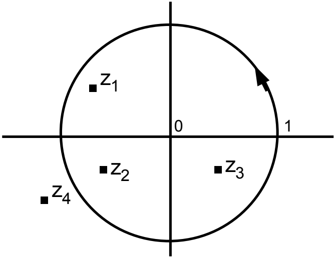
Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^{2\pi} d\theta \; F(\cos\theta, \sin\theta) \; . \tag{23}$$

Έστω ο μετασχηματισμός

$$z = e^{i\theta} \quad \Longrightarrow \quad d\theta = \frac{dz}{iz} \; .$$

Το z διαγράφει το μοναδιαίο κύκλο



Sq ma: Δρόμος ολοκλήρωσης μοναδιαίου κύκλου. Οι εντός της καμπύλης πόλοι είναι στα z_k, για $k = 1, 2, 3$ και οι εκτός για $k = 4$.

Οπότε

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\theta\ F(\cos\theta, \sin\theta) &= \oint_C \frac{dz}{iz} F\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right) \\
&= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} R_k\ , \qquad (24)
\end{aligned}
$$

όπου R_k είναι τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Σημεία διακλάδωσης και υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Θεωρίστε το z που διαγράφει τον μοναδιαίο κύκλο από $e^{0i} = 1$, έως $e^{2\pi i} = 1$. Άρα συναρτήσεις όπως οι z^2, $1/z^3$, $\sin z$, επιστρέφουν στην αρχική τους τιμή μετά από ένα πλήρη κύκλο. Όμως για πλειότιμες συναρτήσεις, χρειάζεται προσοχή. Π.χ. η $z^{1/2}$ και η $\ln z$ γίνονται $-z^{1/2}$ και $\ln z + 2\pi i$ μετά από ένα πλήρη κύκλο.

- Σημεία γύρω από τα οποία μια συνάρτηση είναι πλειότιμη, ονομάζονται σημεία διακλάδωσης.
- Για να τα αποφύγουμε χαράσουμε μια γραμμή που ενώνει τα σημεία αυτά χωρίζοντας το μιγαδικό επίπεδο και τέτοια ώστε η $f(z)$ να έχει διαφορετική τιμή εκατέρωθεν αυτής. Συνήθως οι δύο αυτές τιμές διαφέρουν με μια φάση.
- Η ιδιότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 1ο

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I_n = \int_0^\infty dx \ \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n} \ , \qquad n = 1, 2 \ , \quad a > 0 \ .$$

Λύση Τα ολοκληρώματα γράφονται ως

$$I_n = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dx \ \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dx \ \frac{e^{iax}}{(1+x^2)^n} \ .$$

α) Θεωρούμε τό ημικύκλιο άπειρης ακτίνας στο μιγαδικού επιπέδου, όπου έχουμε ένα απλό πόλο εντός του ημικυκλίου στο $z_1 = i$ και έναν εκτός στο $z_2 = -i$. Άρα

$$\oint dz \ \frac{e^{iaz}}{1+z^2} = 2\pi i \ \frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a} \ ,$$

Η μόνη συνεισφορά στο αριστερό μέλος είναι αυτή κατά μήκος του πραγματικού άξονα, με αποτέλεσμα

$$\int_0^\infty dx\ \frac{\cos ax}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a}\ .$$

β) Θεωρούμε το ίδιο ημικύκλιο οπότε έχουμε ένα διπλό πόλο εντός του στο $z_1 = i$, αλλά και ένα διπλό εκτός στο $z_2 = -i$. Υπολογίζουμε

$$\oint dz\ \frac{e^{iaz}}{(1+z^2)^2} = 2\pi i \frac{d}{dz} \frac{e^{iaz}}{(z+i)^2}\bigg|_{z=i} = \frac{\pi}{2}(1+a)e^{-a}\ .$$

Για το ολοκλήρωμα που μας ενδιαφέρει βρίσκουμε παρόμοια με πρίν

$$\int_0^\infty dx\ \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}(1+a)e^{-a}\ . \tag{25}$$

Παράδειγμα 2ο

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I_1 = \int_0^\infty dx \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} \ .$$

Λύση

Επεκτείνουμε πρώτα το ολοκλήρωμα σε όλη την πραγματική ευθεία

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \mathrm{Im} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{x e^{ix}}{x^2 + a^2}$$

και θεωρούμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$I = \oint_C dz \ \frac{z e^{iz}}{z^2 + a^2} \ ,$$

με δρόμο ολοκλήρωσης C το μεγάλης ακτίνας ημικύκλιο του σχήματος. Αυτός περικλείει τον πόλο στο $z = i|a|$, ενώ ο δεύτερος πόλος στο $z = -i|a|$ βρίσκεται εκτός.

Η μόνη συνεισφορά στο αριστερό μέλος είναι απ' την πραγματική ευθεία με αποτέλεσμα

$$I = 2\pi i \cdot i|a| \cdot \frac{e^{-|a|}}{2i|a|} = i\pi e^{-|a|} \ .$$

Άρα

$$I_1 = \frac{\pi}{2} e^{-|a|} \ .$$

Παράδειγμα 3ο

Να υπολογιστεί τα ολοκλήρωμα

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\Gamma - \Omega} \ . \tag{26}$$

Λύση

Θεωρίστε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$J = \frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\ \frac{e^{izt}}{z - i\Gamma - \Omega}\ , \qquad \Gamma > 0\ , \quad \Omega > 0\ .$$

- Αν $t > 0$ επιλέγουμε ως C το ημικύκλιο άπειρης ακτίνας στο πάνω μέρος του μιγαδικού επιπέδου, το οποίο περικλείει τον απλό πόλο στο σημείο $z = i\Gamma + \Omega$. Το αποτέλεσμα είναι $e^{-\Gamma t + i\Omega t}$.
- Αν $t < 0$ θεωρούμε ως C το ημικύκλιο άπειρης ακτίνας στο κάτω μέρος του μιγαδικού επιπέδου, στο οποίο η συνάρτηση είναι αναλυτική. Το αποτέλεσμα είναι 0.

- Επειδή η συνεισφορά στο ολοκλήρωμα από το κυκλικό μέρος της περιφέρειας του ημικυκλίου είναι μηδενική.
- Έχουμε τελικά ότι
$$I = e^{-\Gamma t + i\Omega t}\Theta(t) \ ,$$
όπου
$$\Theta(t) \ = \ \left\{ \begin{array}{ll} 1 \ , & t > 0 \\ 0 \ , & t < 0 \end{array} \right\}$$
η συνάρτηση βήματος.
- Ολοκληρώματα του τύπου (26) εμφανίζονται σε προβλήματα σχετιζόμενα με διάδοση κυμάτων, σε διαδότες σε Θεωρίες Πεδίου κλπ. Η εμφάνιση της $\Theta(t)$ σχετίζεται με την αρχή της αιτιότητας (το αποτέλεσμα έπεται της αιτίας που το δημιούργισε) η οποία είναι μια φυσική απαίτηση.

Παράδειγμα 4ο

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \frac{x^{2n}}{x^4 - 2\cos 2\theta \ x^2 + 1} \ , \quad 0 < \theta < \pi \ , \quad n = 0, 1 \ ,$$

αποδεικνύοντας ταυτόχρονα ότι $I_0 = I_1$.

Λύση

Θεωρούμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$\oint_C dz \ \frac{z^{2n}}{z^4 - 2\cos 2\theta z^2 + 1} \ , \quad n = 0, 1 \ ,$$

όπου C το ημικύκλιο στο πάνω μέρος του μιγαδικού επιπέδου και ο πραγματικός άξονας. Οι (απλοί) πόλοι της υπό ολοκλήρωσης συνάρτησης δίνονται από της ρίζες της

$$z^4 - 2\cos 2\theta \ z^2 + 1 = 0 \implies \qquad z = e^{\pm i\theta} \ , \quad -e^{\pm i\theta} \ .$$

Επειδή $0 < \theta < \pi$, εντός της C βρίσκονται οι ρίζες $e^{i\theta}$ και $-e^{-i\theta}$. Τότε απ' τη γενική θεωρία

$$
\begin{aligned}
I_n &= 2\pi i \Big[\frac{z^{2n}}{(z-e^{-i\theta})(z+e^{i\theta})(z+e^{-i\theta})}\Big|_{z=e^{i\theta}} \\
&\qquad + \frac{z^{2n}}{(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})(z+e^{i\theta})}\Big|_{z=-e^{-i\theta}} \Big] \\
&= \cdots = \frac{\pi}{2}\frac{\cos(2n-1)\theta}{\sin\theta\cos\theta} \ , \qquad n = 0, 1 \ .
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
I_0 = I_1 = \frac{\pi}{2\sin\theta} \ .
$$

Παράδειγμα 5ο

Να υπολογιστεί τα ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi} \frac{q d\theta}{q^2 + \sin^2\theta} \ , \qquad q \in \mathbb{R} \text{ και } n > 1 \ .$$

Λύση

Θεωρούμε ως δρόμο ολοκλήρωσης C στο μιγαδικό επίπεδο τον μοναδιαίο κύκλο. Με την αλλαγή μεταβλητών

$$z = e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad dz = izd\theta \ , \quad d\theta = \frac{dz}{iz} \ , \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \ ,$$

το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{q d\theta}{q^2 + \sin^2\theta} = 2iq \int_C \frac{dz \ z}{z^4 - 2(2q^2+1)z^2 + 1} \ .$$

- Οι πόλοι του παρονομαστή ως προς z^2 είναι θετικές πραγματικές ποσότητες, έστω $r_\pm^2$ με

$$r_\pm^2 = 2q^2 + 1 \pm \sqrt{(2q^2+1)^2 - 1}\ .$$

- Ισχύει ότι $r_+^2 r_-^2 = 1$ οπότε $r_-^2 < 1$ και $r_+^2 > 1$. Άρα οι μόνοι πόλοι εντός του δρόμου ολοκλήρωσης είναι $z = \pm|r_-|$.
- Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} I &= 2iq \cdot 2\pi i \cdot \Big(\lim_{z\to|r_-|} (z-|r_-|) \frac{z}{(z^2-r_+^2)(z^2-r_-^2)} \\ &\quad + \text{παρομοίως για } z = -|r_-| \Big) \\ &= \frac{\pi\ \mathrm{sign(q)}}{\sqrt{q^2+1}}\ . \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6ο

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

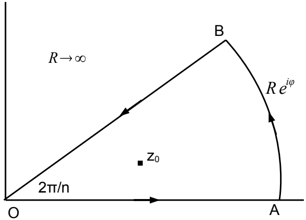
$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} \ , \qquad n \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Θεωρούμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$J_n = \oint_C \frac{dz}{1+z^n} \ ,$$

όπου C η καμπύλη ανοιχτής κόγχης γωνίας $2\pi/n$.



Sq ma: Ο δρόμος ολοκλήρωσης OABO για το παράδειγμα 6.

- Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση έχει μόνο ένα απλό πόλο εντός της C στο σημείο $z_0 = e^{i\pi/n}$. Έτσι έχουμε

$$J_n = -\frac{2\pi i}{n} e^{i\pi/n} \ .$$

- Απ' την άλλη, κατά μήκος των δρόμων:
  - OA: $z = x \quad \Rightarrow \quad J_n = I_n$,
  - BO: $z = xe^{2\pi i/n} \quad \Rightarrow \quad J_n = -e^{2\pi i/n} I_n$.
  - Τόξο AB: $z = Re^{i\varphi}$, με $R \to \infty \quad \Rightarrow \quad J_n = 0$.
- Άρα τελικά

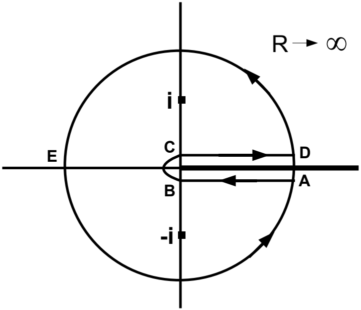
$$I_n = \frac{\pi/n}{\sin \pi/n} \ .$$

Παράδειγμα 7ο

Θεωρούμε τα μιγαδικά ολοκληρώματα

$$J_n = \oint_C dz \, \frac{\ln^n z}{1+z^2} \, , \qquad n = 0, 1, \ldots \, , \tag{27}$$

με περίγραμμα ολοκλήρωσης όπως στην εικόνα



Sq ma: Δρόμος ολοκλήρωση του παραδείγματος 7. Τα σημεία διακλάδωσης στο 0 και στο ∞ ενώνονται με την παχιά γραμμή.

καθώς και τα πραγματικά ολοκληρώματα

$$I_n = \int_0^\infty dx \ \frac{\ln^n x}{1+x^2} \ , \qquad n = 0, 1, \dots \ .$$

- Με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων υπολογίστε τις τιμές των J_n.
- Χρησιμοποιώντας το J_2 δείξτε ότι $I_1 = 0$. Γενικότερα, δείξτε με στοιχειώδη τρόπο (άνευ χρήσεως μιγαδικής ανάλυσης) ότι

$$I_n = 0, \qquad n = 1, 3, 5 \dots \ .$$

- Χρησιμοποιώντας το J_3 δείξτε ότι

$$I_2 = \frac{\pi^3}{8} \ .$$

Λύση

- Εντός της C έχουμε τους απλούς πόλους στα σημεία $z = e^{i\pi/2} = i$ και $z = e^{3i\pi/2} = -i$ και έχουμε

$$\begin{aligned} J_n &= 2\pi i \left[\frac{\left(\ln e^{\pi i/2}\right)^n}{z^2+1}(z-i)\bigg|_{z=i} + \frac{\left(\ln e^{3\pi i/2}\right)^n}{z^2+1}(z+i)\bigg|_{z=-i} \right] \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n \right] \pi^{n+1} i^n \ . \end{aligned}$$

Σημειώνω ότι, λόγω της ύπαρξης των σημείων διακλάδωσης, δεν θέσαμε $-i = e^{-i\pi/2}$ εντός του λογαρίθμου.

- Ο δρόμος CD συνεισφέρει στο J_2 κατά I_2, το μικρό ημικύκλιο γύρω απ' την αρχή των αξόνων μηδέν και το ίδιο και ο μεγάλος κύκλος στο άπειρο. Κατά μήκος του δρόμου AB έχουμε $z = e^{2\pi i}x$, με x να μικραίνει από το ∞ στο 0, οπότε

$$\ln^2 z = (\ln x + 2\pi i)^2 = \ln^2 x - 4\pi^2 + 4\pi i \ln x \ .$$

- Αθροίζοντας τις διάφορες συνεισφορές και χρησιμοποιώντας το στοιχειώδες ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2 \ ,$$

συμπεραίνουμε ότι $I_1 = 0$.
Για την απόδειξη του γενικότερου αποτελέσματος αλλάζουμε πρώτα μεταβλητή ως $x = 1/y$ και παίρνουμε την ταυτότητα

$$I_n = (-1)^n I_n \ ,$$

απ' την οποία συμπεραίνουμε το ζητούμενο.

- Ο δρόμος CD συνεισφέρει στο J_3 κατά I_3, ο μικρός κύκλος 0 και το ίδιο και ο μεγάλος κύκλος στο άπειρο. Κατά μήκος του δρόμου AB έχουμε $z = e^{2\pi i} x$, με x να μικραίνει από το ∞ στο 0, οπότε

$$\ln^3 z = \ln^3 x - 8\pi^3 i + 6\pi i \ln^2 x - 12\pi^2 \ln x \ .$$

Αθροίζοντας τις διάφορες συνεισφορές, συμπεραίνουμε ότι

$$I_2 = \frac{\pi^3}{8} \ .$$

Παράδειγμα 8ο

Θα δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$J(x) = \int_0^\infty dt\ \frac{t^x}{1+t^2} = \frac{\pi}{2\cos(\pi x/2)}\ , \qquad |x| < 1\ . \qquad (28)$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα

$$J_n = \int_0^\infty dt\ \frac{\ln^n t}{1+t^2}\ , \qquad n = 0, 1, \ldots\ . \qquad (29)$$

Θα δώσουμε τη γενική έκφραση μέσω των αριθμών Euler.

Λύση

Θεωρούμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$\zeta(x) = \oint_C dz\ \frac{z^x}{1+z^2}\ ,$$

με περίγραμμα ολοκλήρωσης όπως στην εικόνα του προηγούμενου παραδείγματος.

- Καθώς η ακτίνα $R \to \infty$ και το μικρό ημι-κύκλιο γύρω από το μηδέν συρρικνώνεται, η μόνη μή μηδενική συνεισφορά είναι από

$$\zeta(x) = \int_{\mathrm{CD}} + \int_{\mathrm{AB}} = J(x)(1 - e^{2\pi i x}) \ .$$

- Εντός της καμπύλης έχουμε δύο απλούς πόλους στο $z_1 = e^{i\pi/2}$ και $z_2 = e^{3i\pi/2}$. Οπότε

$$\begin{aligned} \zeta(x) = J(x)(1 - e^{2\pi i x}) &= 2\pi i \left(\frac{e^{i\pi x/2}}{2i} - \frac{e^{3i\pi x/2}}{2i} \right) \ , \\ &= -2\pi i e^{i\pi x} \sin(\pi x/2) \ , \end{aligned}$$

  από όπου παίρνουμε το αποτέλεσμα (28).

- Χρησιμοποιώντας ότι $t^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! \ln^n t$, έχουμε

$$J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} J_n = \frac{\pi}{2\cos(\pi x/2)} \ .$$

- Όμως

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2\cos(\pi x/2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{2n} \ , \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{16}x^2 + \frac{5\pi^5}{768}x^4 + \frac{61\pi^7}{92160}x^6 + \mathcal{O}(x^8) \ . \end{aligned}$$

- Συγκρίνοντας $J_n(x) = 0$ αν το n είναι περιττός ενώ για αν είναι άρτιος

$$J_0 = \frac{\pi}{2} \ , \qquad J_2 = \frac{\pi^3}{8} \ , \qquad J_4 = \frac{5\pi^5}{32} \ , \qquad J_6 = \frac{61\pi^7}{128} \ .$$

Η γενική έκφραση είναι μέσω των αριθμών του Euler:

- Ορίζουμε τα πολυώνυμα του Euler απ΄ την ανάπτυξη

$$2\frac{e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} \ . \tag{30}$$

- Οι αριθμοί του Euler ορίζονται ως

$$E_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right) \ , \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

  και είναι όλοι ακέραιοι, με

$$E_0 = 1 \ , \quad E_2 = -1 \ , \quad E_4 = 5 \ , \quad E_6 = -61 \ , \quad \text{κλπ}$$

  και $E_{2n+1} = 0$.

- Τότε

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|E_{2n}|}{(2n)!} \ z^{2n} \ .$$

- Άρα

$$J_{2n} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} |E_{2n}| \ . \tag{31}$$

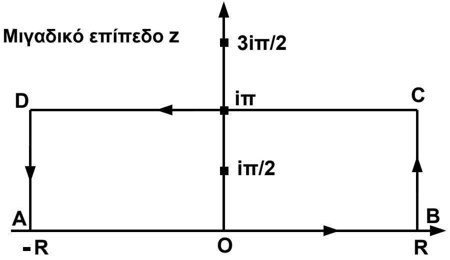
Παράδειγμα 9ο

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I_n(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{e^{ax}}{\cosh^n x} \ , \quad a \in \mathbb{R}^+ \ , \quad n = 1, 2, \ldots \ , \quad a < n \ . \tag{32}$$

Σημειώνω ότι ισχύει $I_n(-a) = I_n(a)$.
Λύση: Θεωρούμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$J_n(a) = \oint_C dz\, \frac{e^{az}}{\cosh^n z} \ . \tag{33}$$



Sq ma: Δρόμος ολοκλήρωσης C του παραδείγματος 9.

- Επειδή $n = 1, 2, \ldots$, η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση έχει μόνο πόλους στα σημεία

$$z_m = i(m + \frac{1}{2})\pi \ , \qquad m \in \mathbb{Z} \ .$$

Μόνο το σημείο $z_0 = i\pi/2$ είναι εντός της C.

- Οι συνεισφορές στο ολοκλήρωμα από τα 4 τμήματα είναι:

$$\begin{aligned}
&AB: \quad z = x \in (-\infty, \infty) \ , \quad J_n(a) = I_n(a) \ , \\
&CD: \quad z = x + i\pi \ , \quad x \in (\infty, -\infty) \ , \quad J_n(a) = -(-1)^n e^{i\pi a} I_n(a) \ , \\
&BC: \quad z = R + iy \ , \quad y \in (0, \pi) \ , \quad \lim_{R\to\infty} J_n(a) = 0 \ , \\
&DA: \quad z = -R + iy \ , \quad y \in (\pi, 0) \ , \quad \lim_{R\to\infty} J_n(a) = 0 \ ,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησα ότι $\cosh(x + i\pi) = -\cosh x$.

- Άρα

$$J_n(a) = \left[1 - (-1)^n e^{i\pi a}\right] I_n(a) \ . \qquad (34)$$

- Για να υπολογίσουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο $z_0 = i\pi/2$ αλλάζουμε μεταβλητή ως

$$z = \zeta + i\pi/2 \implies J_n(a) = (-i)^n e^{i\pi a/2} \oint_C d\zeta \, \frac{e^{a\zeta}}{\sinh^n \zeta} \, ,$$

όπου χρησιμοποίησα ότι $\cosh(\zeta + i\pi/2) = i \sinh \zeta$. Ο δρόμος C είναι ένας μικρός κύκλος γύρω από το $\zeta = 0$.

- Άρα αρκεί να αναπτύξουμε την συνάρτηση

$$\frac{e^{a\zeta}}{\sinh^n \zeta} \, ,$$

σε σειρά γύρω απ' το $\zeta = 0$ και να βρούμε το συντελεστή του $1/\zeta$ όρου, δηλαδή το ολοκληρωτικό υπόλοιπο $R_n(a)$. Μερικές τιμές είναι:

$$R_1(a) = 1 \, , \quad R_2(a) = a \, , \quad R_3(a) = \frac{a^2 - 1}{2} \, , \quad R_4(a) = \frac{a(a^2 - 4)}{6} \, .$$

- Τελικά

$$J_n(a) = 2\pi(-i)^{n-1} e^{i\pi a/2} R_n(a) \, . \tag{35}$$

- Εξισώνοντας τις (34) και (35) βρίσκουμε ότι

$$I_n(a) = 2\pi(-i)^{n-1} \frac{R_n(a)}{e^{-i\pi a/2} - (-1)^n e^{i\pi a/2}} \ . \tag{36}$$

- Μερικά παραδείγματα είναι:

$$\begin{aligned} I_1(a) &= \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)} \ , \quad a < 1 \ , \\ I_2(a) &= \frac{\pi a}{\sin(\pi a/2)} \ , \quad a < 2 \ , \\ I_3(a) &= \frac{\pi(1-a^2)}{2\cos(\pi a/2)} \ , \quad a < 3 \ , \\ I_4(a) &= \frac{\pi a(4-a^2)}{6\sin(\pi a/2)} \ , \quad a < 4 \ . \end{aligned}$$

  Αφήνεται ως [Άσκηση] να δειχθεί ότι οι παραπάνω συναρτήσεις είναι θετικές όπως πρέπει.

- Αν $n \in \mathbb{R}$ και $n > 1$ η απάντηση μπορεί να βρεθεί μέσω υπεργεωμετρικών συναρτήσεων.