ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής Φυσικής
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων,
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Αθήνα, 15784

Πιθανότητες

Περιεχόμενα

- Χρήσιμοι ορισμοί και ιδιότητες.
- Χαρακτηριστική συνάρτηση και ροπές.
- Διωνυμική κατανομή, κατανομές Poisson και Gauss.
- Θεώρημα της μέσης τιμής.
- Ενδεικτικά παραδείγματα.

Χρήσιμοι ορισμοί και ιδιότητες

- Έστω ένα κλειστό σύνολο N δυνατών γεγονότων. Η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός i είναι P_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Θα πρέπει:
  - να είναι θετικά ορισμένοι, δηλαδή

$$0 \leqslant P_i \leqslant 1 \;, \qquad \forall \; i = 1, 2, \ldots, N \;. \tag{1}$$

  - Η συνθήκη κανονικοποίησης

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1 \;. \tag{2}$$

- Αν τα δυνατά γεγονότα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους ισχύουν οι εξείς βασικές ιδιότητες:
  - Η πιθανότητα να συμβούν ή το γεγονός i ή το γεγονός j είναι $P_i + P_j$.
  - Η πιθανότητα να συμβούν και το γεγονός i και το γεγονός j είναι $P_i P_j$.

- Έστω η περίπτωση συνεχούς κατανομής εκβάσεων με μεταβλητή $x \in [a, b]$. Η πιθανότητα η έκβαση να είναι μεταξύ x και $x + dx$ είναι $P(x)dx$, όπου $P(x)$ ονομάζεται πυκνότητα πιθανότητας. Πρέπει:
  - Να είναι θετικά ορισμένη

$$P(x) \geqslant 0 \ , \qquad \forall \ x \ , \quad a \leqslant x \leqslant b \ . \tag{3}$$

  - Να ικανοποιεί τη συνθήκη κανονικοποίησης

$$\int_a^b dx \ P(x) = 1 \ . \tag{4}$$

- Τα παραπάνω εύκολα γενικεύονται για πολλές τυχαίες μεταβλητές, $x_1, x_2, \ldots$.

Χαρακτηριστική συνάρτηση και ροπές

- Η χαρακτηριστική συνάρτηση ορίζεται ως

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N} P_i z^i \ , \qquad z \in \mathbb{C} \ , \tag{5}$$

για τη διακριτή περίπτωση και

$$f(z) = \int_a^b dx \ P(x) z^x \ , \qquad z \in \mathbb{C} \ , \tag{6}$$

για τη συνεχή. Πολλές φορές θέτουμε $z = e^{ik}$. Τότε έχουμε

$$f(k) = \int_a^b dx \ P(x) e^{ikx} \ , \tag{7}$$

που είναι ο μετασχηματισμός Fourier της πυκνότητας πιθανότητας.

- Αντιστρόφως, απ′ τη χαρακτηριστική συνάρτηση μπορούμε να βρούμε τις πιθανότητας ως

$$P_i = \oint_C dz\ f(z) z^{-i-1}\ , \tag{8}$$

όπου C κύκλος με κέντρο το $z = 0$.

- Οι ροπές ορίζονται ως

$$\rho_n = \langle i^n \rangle = \sum_{i=1}^{N} P_i i^n\ , \tag{9}$$

για τη διακριτή περίπτωση και

$$\rho_n = \langle x^n \rangle = \int_a^b dx\ P(x) x^n\ , \tag{10}$$

για τη συνεχή.

- Χρησιμοποιώντας τη χαρακτηριστική συνάρτηση έχουμε ότι

$$\rho_n = \left(z\frac{d}{dz}\right)^n f(z)\bigg|_{z=1} \,, \tag{11}$$

ή αν θέσουμε $z = e^{ik}$ έχουμε

$$\rho_n = \frac{1}{i^n}\left(\frac{d}{dk}\right)^n f(k)\bigg|_{k=0} \,. \tag{12}$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση μας δίνει όλες τις ροπές. Γι΄ αυτό το λόγο ονομάζεται και γεννήτρια συνάρτηση.
Στην πράξη μπορύμε να χρησιμοποιήσουμε την ανάπτυξη

$$\begin{aligned} f(k) &= \int_a^b dx\ P(x)e^{ikx} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ik)^n}{n!}\int_a^b dx\ P(x)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ik)^n}{n!}\langle x^n\rangle \,. \end{aligned} \tag{13}$$

- Ιδιαίτερη σημασία έχει η διασπορά ως

$$\sigma^2 = \langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \,, \tag{14}$$

καθώς μετρά το πόσο διασπείρονται η πιθανές τιμές της τυχαίας μεταβλητής x γύρω απ΄ τη μέση τιμής της

Η διωνυμική κατανομή

Έστω γεγονός πού έχει πιθανότητα $0 < p < 1$ να συμβεί.

- Ποιά είναι η κατανομή πιθανότητας μετά από N προσπάθειες να έχουν συμβεί n γεγονότα;
- Έστω $P_{n,N}$ η ζητούμενη κατανομή που υπακούει

$$P_{n,N} = pP_{n-1,N-1} + (1-p)P_{n,N-1} + \delta_{n,0}\delta_{N,0} \ . \tag{15}$$

Αποτελεί το άθροισμα τριών ανεξάρτητων δυνατοτήτων:

- Ο 1ος όρος την πιθανότητα να έχουμε $n-1$ γεγονότα σε $N-1$ προσπάθειες και να συμβεί ένα επιπλέον γεγονός.
- Ο 2ος όρος την πιθανότητα να έχουμε n γεγονότα σε $N-1$ προσπάθειες και να μην συμβεί επιπλέον γεγονός.
- Ο τελευταίος όρος είναι αναγκαίος γιατί δηλώνει τη φυσική απαίτηση ότι με 0 προσπάθειες έχουμε 0 γεγονότα.
- $P_{n,N} = 0$ αν ένας απ΄ τους δύο δείκτες είναι αρνητικός.
- Η λύση θα είναι τέτοια ώστε $P_{n,N} = 0$ αν $n > N$.

- Ορίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση

$$P(x,y) = \sum_{n,N=-\infty}^{\infty} P_{n,N} x^n y^N \ .$$

- Εύκολα βρίσκουμε ότι ικανοποιεί την

$$P = p\ xy\ P + (1-p)y\ P + 1 \ .$$

- Η λύση της είναι

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{1}{1-pxy-(1-p)y} = \sum_{N=0}^{\infty} [pxy + (1-p)y]^N \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!}\ p^n (1-p)^{N-n} x^n y^N \ . \end{aligned}$$

- Τελικά παίρνουμε τη διωνυμική κατανομή

$$P_{n,N}(p) = \frac{N!}{n!(N-n)!}\ p^n (1-p)^{N-n} \ , \qquad n \leqslant N \ . \tag{16}$$

Σημειώνω ότι αυτή είναι σωστά κανονικοποιημένη γιατί

$$\sum_{n=0}^{N} P_{n,N}(p) = 1 \ , \quad \forall\ N \in \mathbb{Z} \text{ και } 0 < p < 1 \ . \tag{17}$$

Η κατανομή Poisson

Ας θεωρήσουμε στην διωνυμική κατανομή το όριο

$$N \gg 1 \,, \qquad Np = a = \text{πεπερασμένο} \,. \tag{18}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling

$$(N+b)! \simeq \sqrt{2\pi} e^{-N} N^{N+b+1/2} \,, \quad \text{για } N \gg 1 \text{ και } b = \text{πεπερασμένο} \,, \tag{19}$$

καθώς και ότι

$$(1-p)^{N-n} = \left(1 - \frac{a}{N}\right)^{N-n} \simeq e^{-a} \,, \quad \text{καθώς } N \to \infty \,,$$

βρίσκουμε την κατανομή Poisson

$$P_n(a) = \frac{a^n e^{-a}}{n!} \,. \tag{20}$$

Η κατανομή Poisson εμφανίζεται σε συστήματα με μεγάλο αριθμό μετρήσεων/γεγονότων το καθένα από τα οποία είναι σπάνιο. Κλασική περίπτωση αποτελεί η μετατροπή ασταθών πυρήνων σε ευσταθείς με εκπομπή ακτινοβολίας.

- Η κατανομή Poisson είναι σωστά κανονικοποιημένη

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(a) = 1 \ , \quad \forall \ a \ .$$

- Η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(a) z^n = e^{-a(1-z)} \ .$$

- Οι ροπές είναι

$$\langle n^m \rangle = e^{-a} \left(z \frac{d}{dz} \right)^m e^{az} \bigg|_{z=1} \ ,$$

απ' την οποία υπολογίζουμε

$$\langle n \rangle = a \ , \quad \langle n^2 \rangle = a(a+1) \ , \quad \langle n^3 \rangle = a(a^2+3a+1) \ , \quad \text{κλπ} \ ,$$

οπότε για τη διασπορά έχουμε

$$\sigma = \sqrt{a} \ .$$

Οι παραπάνω ροπές συνδέονται με τα πολυώνυμα Touchard.

Η κατανομή Gauss

Ας θεωρήσουμε στην διωνυμική κατανομή το όριο

$$N \gg 1 \ , \qquad p = \text{πεπερασμένο} \ . \tag{21}$$

Θα θεωρήσουμε ισοδύναμα το όριο $a \gg 1$ στην κατανομή Poisson (20), αναπτύσσοντας γύρω απ' το μέγιστό της.

- Για να βρώ το μέγιστο της κατανομής για $m \gg 1$ χρησιμοποιώ την ανάπτυξη Stirling (19). Άρα

$$P_m \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{a}{m}\right)^{m-1/2} e^{m-a} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{af(x)} \ ,$$

όπου

$$f(x) = x - (x+1)\ln(x+1) \ , \qquad x = \frac{m}{a} - 1 \ .$$

Έχουμε ότι

$$f'(0) = 1 \ , \qquad f''(0) = -1 \ ,$$

άρα $x = 0$ είναι μέγιστο.

- Αναπτύσσοντας γύρω απ' το $x = 0$ έχουμε

$$P_m \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-ax^2/2} \ .$$

- Ισχύει ότι $P_m dm = P_a(x)dx$ και $dm/dx = a$, οπότε

$$P_a(x) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} e^{-ax^2/2} \ , \qquad (22)$$

που είναι η ζητούμενη κατανομή Gauss.

- Για τη μέση τιμή και τη διασπορά βρίσκουμε

$$\langle x \rangle = 0 \ , \qquad \sigma^2 = \langle x^2 \rangle = \frac{1}{a} \ .$$

- Η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$f(k) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \ e^{ikx} e^{-ax^2/2} = e^{-\frac{k^2}{2a}} \ .$$

- Στο όριο μηδενικής διασποράς, ή ισοδύναμα στην περίπτωσή μας, όταν $a \to \infty$, έχουμε

$$\lim_{a \to \infty} P_a(x) = \delta(x) \ , \qquad (23)$$

η κατανομή είναι η δ-συνάρτηση.

Το θεώρημα της μέσης τιμής

Έστω N ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ με κατανομές και γεννήτριες συναρτήσεις $P_i(x_i)$ και $f_i(k)$, αντίστοιχα. Ποιά είναι η πυκνότητα πιθανότητας για μια συνάρτηση $z = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ και ποιά η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση;

- Επειδή πρόκειται για ανεξάρτητες μεταβλητές έχουμε για την πυκνότητα πυθανότητας

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_N) d^N\mathbf{x} = P_1(x_1) P_2(x_2) \ldots P_N(x_N) d^N\mathbf{x} \ , \tag{24}$$

  όπου $d^N\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \ldots dx_N$.

- Για τη γεννήτρια συνάρτηση έχουμε

$$F_N(k) = \int d^N\mathbf{x}\ P_1(x_1) P_2(x_2) \ldots P_N(x_N) e^{ik\phi(x_1, x_2, \ldots, x_N)} \ .$$

- Ας υποθέσουμε ότι

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} \ . \tag{25}$$

Τότε βλέπουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση γράφεται ώς το γινόμενο των αντίστοιχων γεννητριών συναρτήσεων

$$F_N(k) = f_1\left(\frac{k}{N}\right) f_2\left(\frac{k}{N}\right) \cdots f_N\left(\frac{k}{N}\right) \ . \tag{26}$$

- Ας υποθέσουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή x έχει πυκνότητα πυθανότητας $P(x)$ και γεννήτρια συνάρτηση $f(k)$.
  - Με κατάλληλο ορισμό της x μπορούμε να εκλέξουμε $\langle x \rangle = 0$, οπότε $\langle x^2 \rangle = \sigma^2$.
  - Έστω ότι την έχουμε μετρήσει N φορές με αποτελέσματα x_i, $i = 1, 2, \ldots N$.

Τότε, σύμφωνα με την (26), η γεννήτρια συνάρτηση για τη μέση τιμή των μετρήσεων z θα είναι

$$F_N(k) = \left[f\left(\frac{k}{N}\right) \right]^N \ . \tag{27}$$

- Για $N \gg 1$ έχουμε
$$F_N(k) = \left(1 - \frac{k^2\sigma^2}{2N^2} + \cdots\right)^N \ .$$
- Αν ορίσουμε
$$\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \Sigma = \text{πεπερασμένο} \ ,$$
έχουμε ότι
$$F(k) \equiv \lim_{N\to\infty} F_N(k) = e^{-\frac{k^2\Sigma^2}{2}} \ ,$$
η οποία είναι η γεννήτρια συνάρτηση της κατανομής Gauss
$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Sigma} e^{-\frac{z^2}{2\Sigma^2}} \ .$$
- Αυτό είναι το θεώρημα του κεντρικού ορίου: Ανεξάρτητα από τη μορφή της κατανομής που ακολουθεί μια τυχαία μεταβλητή, η μέση τιμή ενός μεγάλου αριθμού μετρήσεων της ακολουθεί κατανομή Gauss.

Παράδειγμα 1ο

Κανόνι εκτοξεύει μεγάλο αριθμό σφαιριδίων με το ίδιο μέτρο ταχύτητας και με ισοπίθανη κατανομή σε όλες τις γωνίες με $\theta \in [0, \pi/4]$. Οι κρούσεις με το έδαφος θεωρούνται πλαστικές.

- Ποιά κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή του βεληνεκούς;
- Αν χωρίσουμε την απόσταση απ΄ το σημείο βολής έως το σημείο μέγιστου βεληνεκούς σε 2 ίσα μέρη, βρείτε το ποσοστό σφαιριδίων που συγκεντρώνονται στα δύο μέρη.
- Με ποιό τρόπο πρέπει να μοιραστεί η απόσταση ώστε να έχουμε τον ίδιο αριθμό σφαιριδίων και στα δύο μέρη;

Λύση: Το βεληνεκές δίνεται απ' τη σχέση

$$s(\theta) = s_0 \sin 2\theta \ , \qquad s_0 = \frac{v_0^2}{g} \ .$$

και ισοκατανομή στις γωνίες σημαίνει ότι

$$P(\theta) = \frac{4}{\pi} \ .$$

- Άρα έχουμε ότι

$$P(s)ds = P(\theta)d\theta \quad \Longrightarrow \quad P(s) = \frac{2}{\pi\sqrt{s_0^2 - s^2}} \ . \qquad (28)$$

- Έστω $N \gg 1$ ο συνολικός αριθμός σφαιριδίων που εκτοξεύστηκαν. Στο 1ο διάστημα με $s \in (0, s_0/2)$ έπεσαν

$$N_1 = N \int_0^{s_0/2} P(s)ds = \frac{2}{\pi} N \int_0^{s_0/2} \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \frac{N}{3} \ .$$

  Στο διάστημα με $s \in (s_0/2, s_0)$ έπεσαν

$$N_2 = N \int_{s_0/2}^{s_0} P(s)ds = \frac{2}{\pi} N \int_{s_0/2}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \frac{2N}{3} \ .$$

- Έστω d η απόσταση απ' το σημείο βολής σε σημείο το οποίο χωρίζει το διάστημα μέγισου βεληνεκούς σε δύο μέρη. Για να έχουμε τον ίδιο αριθμό σφαιριδίων θα πρέπει να ισχύει

$$\int_0^d P(s)ds = \int_d^{s_0} P(s)ds \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\frac{d}{s_0} = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{d}{s_0} \ .$$

- Πρέπει να επιλύσουμε την εξίσωση

$$\sin^{-1}\frac{d}{s_0} = \cos^{-1}\frac{d}{s_0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{s_0} = \sqrt{1-\left(\frac{d}{s_0}\right)^2} \ .$$

Τελικά βρίσκουμε

$$d = \frac{s_0}{\sqrt{2}} \simeq 0.707 s_0 \ . \qquad (29)$$

Παράδειγμα 2ο

- Υπολογίστε την πυκνότητα πιθανότητας $P(s)$, όπου s η απόσταση δύο τυχαίων σημείων στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου.
- Δώστε τη γενική έκφραση για την $\langle s^n \rangle$.
- Ποιά είναι η $\langle s \rangle$, η $\langle s^2 \rangle$ και η διασπορά;

Λύση:

- Έστω τα τυχαία σημεία Α και Β στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου με συντεταγμένες

$$\begin{aligned} A: &\quad (x,y) = (1,0) \ , \\ B: &\quad (x,y) = (\cos\theta, \sin\theta) \ , \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \ . \end{aligned} \tag{30}$$

- Η απόστασή τους είναι

$$s = \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = 2\sin\frac{\theta}{2} \ , \qquad 0 \leqslant s \leqslant 2 \ . \tag{31}$$

- Επειδή τα σημεία είναι τυχαία, η γωνιακή τους κατανομή είναι

$$P(\theta) = \frac{1}{\pi} \ . \tag{32}$$

- Άρα

$$P(s) = P(\theta)\frac{d\theta}{ds} = \frac{1/\pi}{\sqrt{1-s^2/4}} \ . \tag{33}$$

Εκ΄ κατασκευής η κανονικοποίησή της είναι η σωστή, δηλαδή

$$\int_0^2 ds \ P(s) = 1 \ .$$

- Εξ΄ ορισμού

$$\begin{aligned}
\langle s^n \rangle &= \int_0^2 ds \ P(s) s^n = \frac{1}{\pi}\int_0^2 ds \ \frac{s^n}{\sqrt{1-s^2/4}} \\
&= \frac{2^n}{\pi}\int_0^1 dx \ x^{n/2-1/2}(1-x)^{-1/2} \\
&= \frac{2^n}{\pi} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{2^n}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \ ,
\end{aligned}$$

όπου $B(x,y)$ η Βήτα συνάρτηση.

- Χρησιμοποιώντας ότι $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, έχουμε ότι

$$\langle s^n \rangle = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \ . \tag{34}$$

- Για $n = 1$ έχουμε

$$\langle s \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3/2)} = \frac{4}{\pi} \simeq 1.27 > 1 \ . \tag{35}$$

Η μέση τιμή της απόστασης δύο τυχαίων σημείων στην περιφέρειας ενός κύκλου είναι μεγαλύτερη της ακτίνας του. Για $n = 2$ έχουμε

$$\langle s^2 \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} = 2 \ . \tag{36}$$

Άρα η διασπορά είναι

$$\sigma = \sqrt{2 - \frac{16}{\pi^2}} \simeq 0.62 \ . \tag{37}$$

Παράδειγμα 3ο

Για την τυχαία μεταβλητή x η κατανομή πιθανότητας είναι

$$P(x) = e^{-x} \ , \qquad 0 \leqslant x < \infty \ . \tag{38}$$

- Βρείτε την μέση τιμή $\langle x \rangle$ και την τυπική απόκλιση σ.

Δύο τυχαίες μεταβλητές x_1, x_2 είναι στατιστικώς ανεξάρτητες μεταξύ τους και ακολουθούν την (38).

- Βρείτε τις $\langle x_1 + x_2 \rangle$ και $\langle x_1 x_2 \rangle$.
- Ποιά είναι η αντίστοιχη χαρακτηριστική συνάρτηση;
- Βρείτε την κατανομή για την τυχαία μεταβλητή $s = x_1 + x_2$.
- Βρείτε την κατανομή για την τυχαία μεταβλητή $r = x_1 - x_2$.

Λύση:

- Απ' τον ορισμό

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty dx \ x e^{-x} = \Gamma(2) = 1 \ .$$

και

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^\infty dx \ x^2 e^{-x} = \Gamma(3) = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma^2 = 1 \ .$$

- Έχουμε

$$\langle x_1 + x_2 \rangle = 1 + 1 = 2, \qquad \langle x_1 x_2 \rangle = 1 \cdot 1 = 1 \ .$$

- Εξ' ορισμού η γεννήτρια συνάρτηση για τις x_1 και x_2 είναι

$$\Phi(k) = \int_0^\infty dx \ e^{-x(1-ik)} = \frac{1}{1-ik} \ .$$

- Απ' τη θεωρία η γεννήτρια συνάρτηση για την τυχαία μεταβλητή $s = x_1 + x_2$ είναι το γινόμενο των επιμέρους:

$$\Phi_s(k) = [\Phi(k)]^2 = \frac{1}{(1-ik)^2} \ .$$

Τότε

$$P(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \ \frac{e^{-iks}}{(1-ik)^2} \ .$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

  - Χρησιμοποιούμε ως περίγραμμα ολοκλήρωσης ημικύκλιο άπειρης ακτίνας εκτεινόμενο στον κάτω μιγαδικό επίπεδο.
  - Ο διπλός πόλος είναι στο $k = -i$.

Έτσι βρίσκουμε

$$P(s) = s \ e^{-s} \ , \qquad s \geqslant 0 \ . \tag{39}$$

- Στην περίπτωση της τυχαίας μεταβλητής $r = x_1 - x_2$ η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\Phi_r(k) = \Phi(k)\Phi(-k) = \frac{1}{1+k^2} \ .$$

Τότε

$$P(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \ \frac{e^{-ikr}}{1+k^2} \ .$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

  - Χρησιμοποιούμε ως περίγραμμα ολοκλήρωσης ημικύκλιο άπειρης ακτίνας εκτεινόμενο στον άνω (κάτω) μιγαδικό επίπεδο για r αρνητικό (θετικό).
  - Αντίστοιχα, ο απλός πόλος είναι στο $k = i$ ($k = -i$).

Έτσι βρίσκουμε

$$P(r) = \frac{1}{2}e^{-|r|} \ , \qquad -\infty < r < \infty \ . \tag{40}$$