9 Ιανουαρίου 2020

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων,
Τμήμα Φυσικής,
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Αθήνα, 15784

Μαθηματική Φυσική - 7ο Εξάμηνο

- **Σημειώσεις σε μιγαδική ανάλυση με θέμα την σύμμορφη απεικόνιση.**
- **Εφαρμογές σε ηλεκτροστατική και σε ρευστομηχανική.**

Περιεχόμενα

1 Συμβάσεις και εισαγωγικές έννοιες

Στο μιγαδικό επίπεδο (x, y) ορίζουμε $z = x+iy$, $\bar{z} = z-iy$ [θα χρησιμοποιώ επίσης (x_1, x_2) για (x, y)], οπότε

$$\begin{aligned} &\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \ , \qquad \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \ , \\ &\partial_x = \partial + \bar{\partial} \ , \qquad \partial_x = i(\partial - \bar{\partial}) \ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ο τελεστής Laplace

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 2(\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial) = 4\partial\bar{\partial} = 4\bar{\partial}\partial \ , \tag{1.2}$$

όπου οι τελευταίες σχέσεις ισχύουν αν οι παράγωγοι μετατίθενται.

Ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις (αποδεικνύονται με το θεώρημα Stokes)

$$\begin{aligned}
&\nabla^2_{(d)}\frac{1}{r^{d-2}} = -2(d-2)\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\delta^{(d)}(\mathbf{x}) \ , \qquad d>2 \ , \\
&\nabla^2_{(2)}\ln r = 2\pi\delta^{(2)}(\mathbf{x}) \ , \\
&\nabla^2_{(1)} r = \frac{d^2}{dx^2}|x| = 2\delta(x) \ .
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Η 1η γραμμή ισχύει και για $d=1$. Αν προσθέσουμε μια άπειρη σταθερά η 1η γραμμή αναπαράγει και την περίπτωση με $d=2$. Από αυτά αναπαράγουμε

$$\begin{aligned}
\partial_i\partial_j\frac{1}{r^{d-2}} &= -\frac{d-2}{r^d}\left(\delta_{ij}-d\frac{x_ix_j}{r^2}\right)-\frac{4}{d}\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2-1)}\delta_{ij}\delta^{(d)}(\mathbf{x}) \ , \qquad d>2 \ , \\
\partial_i\partial_j\ln r &= \frac{1}{r^2}\left(\delta_{ij}-2\frac{x_ix_j}{r^2}\right)+\pi\delta_{ij}\delta^{(2)}(\mathbf{x}) \ , \qquad d=2 \ .
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Σε δύο διαστάσεις θα χρησιμοποιώ το γράμμα ρ αντί για το r για να συμβολίζω την απόσταση. Έχουμε $z=\rho e^{i\phi}$ και

$$\begin{aligned}
&\bar\partial\partial\ln\rho^2 = \bar\partial\partial\ln(z\bar z) = \bar\partial\frac{1}{z} \ , \\
&\bar\partial\partial\ln\rho^2 = \frac{1}{2}\nabla^2\rho = \pi\delta^{(2)}(\mathbf{x}) \ .
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Άρα

$$\bar\partial\frac{1}{z} = \pi\delta^{(2)}(\mathbf{x}) = \partial\frac{1}{\bar z} \ . \tag{1.6}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
\pi\delta^{(2)}(\mathbf{x}) = \bar\partial\partial\ln z = \frac{1}{4}\nabla^2\ln\rho + \frac{1}{4}(\partial_x\partial_y-\partial_y\partial_x)\phi \\
+\frac{i}{4}\nabla^2\phi - \frac{i}{4}(\partial_x\partial_y-\partial_y\partial_x)\ln\rho \ .
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Απ΄ τις $\partial_x = \cos\phi\partial_\rho - \sin\phi/\rho\partial_\phi$ και $\partial_y = \sin\phi\partial_\rho + \cos\phi/\rho\partial_\phi$ η 2η σειρά είναι μηδέν. Άρα βρίσκουμε ότι

$$(\partial_x\partial_y-\partial_y\partial_x)\phi = 2\pi\delta^{(2)}(\mathbf{x}) \ . \tag{1.8}$$

Μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ μπορεί πάντα να γραφτεί ως

$$f(z) = u(x,y)+iv(x,y) \ . \tag{1.9}$$

Απ΄ το γεγονός ότι $\bar\partial f(z)=0$ παίρνουμε τις εξισώσεις Cauchy–Riemann

$$\partial_x u = \partial_y v \ , \qquad \partial_y u = -\partial_x v \ . \tag{1.10}$$

Οι u και η v είναι αρμονικές συναρτήσεις.

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + \partial_y^2)u &= (\partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x)v = 0 \ , \\ (\partial_x^2 + \partial_y^2)v &= (-\partial_x \partial_y + \partial_y \partial_x)u = 0 \ , \end{aligned} \tag{1.11}$$

αρκεί να μετατίθενται οι παράγωγοι. Άρα αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική τότε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της είναι αρμονικές συναρτήσεις.

2 Εφαρμογές

2.1 Ρευστομηχανική

Ο σκοπός της θεωρίας είναι η εύρεση της ταχύτητας $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ σε ένα ρευστό. Θεωρούμε στατικές περιπτώσεις τέτοιες ώστε $\partial_t \mathbf{v} = 0$. Σε ένα **ασυμπίεστο** ρευστό

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \ . \tag{2.1}$$

Αν επιπλέον η ροή είναι **αστρόβιλη**, τότε επιπρόσθετα ισχύει ότι

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \tag{2.2}$$

και το υγρό ονομάζεται ιδεώδες. Σε δύο διαστάσεις οι εξισώσεις αυτές γράφονται ως

$$\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 = 0 \ , \qquad \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = 0 \ , \tag{2.3}$$

όπου $\partial_i = \partial/\partial x_i$, που είναι οι εξισώσεις Cauchy–Riemann με

$$u = v_1 \ , \qquad v = -v_2 \ . \tag{2.4}$$

Σωμάτια στο υγρό υπακούουν

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = u(x,y) \ , \qquad v_2 = \frac{dy}{dt} = -v(x,y) \ . \tag{2.5}$$

Επειδή u και v ορίζουν μια μιγαδική συνάρτηση στην (1.9) έχουμε ότι οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = f(z) \ . \tag{2.6}$$

Η συνάρτηση $f(z)$ ονομάζεται **μιγαδική συνάρτηση ταχύτητας**. Απ΄ την (2.2) έχουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση ϕ (**δυναμικό ταχύτητας**), τέτοια ώστε $\mathbf{v} = \nabla\phi$. Σε δύο διαστάσεις

$$u = \partial_x \phi \ , \qquad v = -\partial_y \phi \ . \tag{2.7}$$

Με αυτές η 2η των (1.10) ικανοποιείται αυτόματα, η δε 1η μας λέει ότι η ϕ είναι αρμονική συνάρτηση. Επομένως μπορεί να θεωρηθεί ως το πραγματικό μέρος μιας μιγαδικής συνάρτησης

$$\chi(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y) \ . \tag{2.8}$$

Η συνάρτηση (ροής) $\psi(x,y)$ ικανοποιεί απ΄ τις (1.10) τις

$$u = \partial_y \psi \ , \qquad v = \partial_x \psi \ . \tag{2.9}$$

Η $\chi(z)$ ονομάζεται **μιγαδικό δυναμικό ταχύτητας** γιατί ικανοποιεί

$$
\begin{aligned}
\frac{d\chi}{dz} &= \frac{1}{2}\partial_x\phi - \frac{i}{2}\partial_y\phi + \frac{i}{2}\partial_x\psi + \frac{1}{2}\partial_y\psi = \frac{u}{2} + \frac{i}{2}v + \frac{i}{2}v + \frac{u}{2} \\
&= u + iv = f(z) \ .
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Σημείωστε ότι

$$
\mathbf{v}\cdot\nabla\psi = v_1\partial_x\psi + v_2\partial_y\psi = uv - vu = 0 \ . \tag{2.11}
$$

Εξ΄ ορισμού, το πεδίο της ταχύτητας $\mathbf{v}$ είναι κάθετο στις καμπύλες με $\phi(x,y) = \text{const.}$ (**ισοδυναμικές γραμμές**). Εξαιτίας της προηγούμενης σχέσης είναι εφαπτομενικό στις καμπύλες με $\psi(x,y) = \text{const.}$ (**γραμμές ροής**) κατά μήκος των οποίων κινούνται τα σωμάτια. Οι ισοδυναμικές γραμμές και οι γραμμές ροής τέμνονται παντού κάθετα εκτός απ΄ τα σημεία στα οποία $\mathbf{v} = 0$ (**σημεία στασιμότητας**).

2.1.1 Θεωρήματα διατήρησης, δυνάμεων και ροπών

Η πίεση $p(x,y)$ και η ταχύτητα $\mathbf{v}(x,y)$ σε ένα ιδανικό ρευστό η διατήρηση ενέργειας εκφράζεται μέσω του νόμου του Bernoulli

$$
P + \frac{\sigma}{2}\mathbf{v}^2 = \text{const.}, \tag{2.12}
$$

όπου σ, σταθερά. Το θεώρημα του Blasius λέει ότι η ολική δύναμη στο αντικείμενο που ορίζεται απ΄ την καμπύλη C είναι

$$
\bar{F} = \frac{i}{2}\,\sigma \oint_C dz\, f^2(z) \ , \qquad F = F_x + iF_y \ . \tag{2.13}
$$

Επίσης η ροπή είναι

$$
M = -\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{Re}\left(\oint_C dz\, z f^2(z)\right) \ . \tag{2.14}
$$

Στα παραπάνω $f = \chi'$ σύμφωνα με την (2.10).

2.1.2 Παραδείγματα

$\mathbf{f(z) = 1}$: Οι εξισώσεις κίνησης σωματιδίων είναι

$$
\frac{dx}{dt} = 1 \ , \qquad \frac{dy}{dt} = 0 \ . \tag{2.15}
$$

Προφανώς οι γραμμές ροής είναι $y = \text{const.}$, παράλληλος προς τον άξονα x. Το μιγαδικό δυναμικό είναι

$$
\chi(z) = z \implies \phi(x,y) = x \ , \quad \psi(x,y) = y \ . \tag{2.16}
$$

Οι ισοδυναμικές γραμμές είναι $x = \text{const.}$ και είναι κάθετες στις γραμμές ροής $y = \text{const.}$.

$\mathbf{f(z) = z}$: Οι εξισώσεις κίνησης σωματιδίων είναι

$$\frac{dx}{dt} = x \ , \qquad \frac{dy}{dt} = -y \ . \tag{2.17}$$

Προφανώς οι γραμμές ροής είναι $x \sim e^t$ και $x \sim e^{-t}$, οπότε υπακούουν $xy = \text{const.}$. Το μιγαδικό δυναμικό είναι

$$\chi(z) = \frac{z^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \phi(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \ , \quad \psi(x,y) = xy \ . \tag{2.18}$$

Οι ισοδυναμικές γραμμές είναι $x^2 - y^2 = \text{const.}$ και είναι κάθετες στις γραμμές ροής $xy = \text{const.}$.

$\mathbf{f(z) = \frac{k}{z}}$, $k \in \mathbb{R}$: Οι εξισώσεις κίνησης σωματιδίων είναι

$$\frac{dx}{dt} = k\frac{x}{x^2+y^2} \ , \qquad \frac{dy}{dt} = k\frac{y}{x^2+y^2} \ . \tag{2.19}$$

Το μιγαδικό δυναμικό είναι

$$\chi(z) = k \ln z \quad \Longrightarrow \quad \phi(x,y) = k \ln \rho \ , \quad \psi(x,y) = k\phi \ , \tag{2.20}$$

σε πολικές συντεταγμένες. Οι ισοδυναμικές γραμμές είναι $\rho = \text{const.}$ και είναι κάθετες στις γραμμές ροής $\phi = \text{const.}$. Επειδή $\dot{\rho} = k/\rho$, για $k > 0$ ($k < 0$) το σημείο $z = 0$ δρα ως πηγή (καταβόθρα).

$\mathbf{f(z) = -\frac{ik}{z}}$, $k \in \mathbb{R}$: Οι εξισώσεις κίνησης σωματιδίων είναι

$$\frac{dx}{dt} = -k\frac{y}{x^2+y^2} \ , \qquad \frac{dy}{dt} = k\frac{x}{x^2+y^2} \ . \tag{2.21}$$

Το μιγαδικό δυναμικό είναι

$$\chi(z) = -ik \ln z \quad \Longrightarrow \quad \phi(x,y) = k\phi \ , \quad \psi(x,y) = -k \ln \rho \ , \tag{2.22}$$

ξανά σε πολικές συντεταγμένες. Οι ισοδυναμικές γραμμές είναι $\phi = \text{const.}$ και είναι κάθετες στις γραμμές ροής $\rho = \text{const.}$. Επειδή $\dot{\phi} = k/\rho^2$, για $k > 0$ ($k < 0$) η ροή είναι αντίθετη (με) τη φορά του ρολογιού.

$\mathbf{f(z) = \frac{k}{z+z_0} - \frac{k}{z-z_0}}$, $k > 0$: Το μιγαδικό δυναμικό είναι

$$\chi(z) = k \ln\left(\frac{z+z_0}{z-z_0}\right) \ , \tag{2.23}$$

η υπέρθεση μιας πηγής και μιας καταβόθρας. Στο όριο $z_0 \to 0$ και $k \to \infty$, με $2kz_0 = \mu =$ const., έχουμε

$$\chi(z) = \frac{\mu}{z} \quad \Longrightarrow \quad \phi(x,y) = \mu \frac{x}{x^2+y^2} \ , \quad \psi(x,y) = -\mu \frac{y}{x^2+y^2} \ , \tag{2.24}$$

που αντιστοιχεί σε δίπολο. Η μιγαδική συνάρτηση ταχύτητας είναι $f(z) = -\mu/z^2$ και οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\frac{dx}{dt} = -\mu \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \ , \qquad \frac{dy}{dt} = -\mu \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \ . \tag{2.25}$$

$\mathbf{f(z) = 1 - \frac{1}{z^2}}$: Οι εξισώσεις κίνησης σωματιδίων είναι

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \ , \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \ . \tag{2.26}$$

Το μιγαδικό δυναμικό είναι

$$\chi(z) = z + \frac{1}{z} \quad \Longrightarrow \quad \phi(x,y) = x + \frac{x}{x^2+y^2} \ , \quad \psi(x,y) = y - \frac{y}{x^2+y^2} \ . \tag{2.27}$$

Οι ισοδυναμικές γραμμές είναι

$$x + \frac{x}{x^2+y^2} = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\phi = d_e \tag{2.28}$$

και είναι κάθετες στις γραμμές ροής

$$y - \frac{y}{x^2+y^2} = \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\phi = d_s \ . \tag{2.29}$$

Η ταχύτητα δίνεται μέσω του δυναμικού ταχύτητας. Συγκεκριμένα, σε πολικές συντεταγμένες, απ' τις

$$\phi(\rho,\phi) = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\phi \quad \Longrightarrow \quad v_\rho = \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)\cos\phi \ , \ v_\phi = -\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right)\sin\phi \ . \tag{2.30}$$

Για $\rho = 1$ η ακτινική συνιστώσα μηδενίζεται και τα σημεία στασιμότητας είναι για $\rho = 1$ και για $\phi = 0$ & π. Άρα έχουμε ροή ρευστού εκτός δίσκου ακτίνας $\rho = 1$ με ταχύτητα για $\rho \gg 1$, $\mathbf{v}_\infty = \hat{x}$.

2.2 Ηλεκτροστατική

Στην περίπτωση της **ηλεκτροστατικής** έχουμε το ηλεκτρικό πεδίο να ικανοποιεί τις ίδιες εξισώσεις με το πεδίο ταχύτητας.

2.2.1 Παραδείγματα

Αρμονική συνάρτηση στο άνω μιγαδικό επίπεδο: Επιλύστε την εξίσωση Laplace στο άνω μιγαδικό επίπεδο με οριακές συνθήκες

$$\Phi(x,0) = \left\{ \begin{array}{ll} V_1\,, & x<0 \\ V_2\,, & x>0 \end{array} \right\} . \tag{2.31}$$

Η συνάρτηση $\Phi = A + B\theta$ είναι αρμονική, π.χ. είναι το φανταστικό μέρος της μιγαδικής συνάρτησης $f(z) = Ai + B\ln z$, $z = \rho e^{i\theta}$. Έχουμε

$$A = V_2\ , \qquad A + \pi B = V_1 \quad \Longrightarrow \quad A = V_2\ , \qquad B = \frac{V_1 - V_2}{\pi}\ . \tag{2.32}$$

Άρα

$$\Phi(x,y) = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}\ . \tag{2.33}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί και με την παραδοσιακή μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Με ανάλυση Fourier στην διεύθυνση x βρίσκουμε ότι

$$\Phi(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, A_k\, e^{ikx-|k|y}\ , \tag{2.34}$$

με[1]

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\Phi(x,0) \\ &= \frac{V_1}{2\pi}\int_0^{\infty} dx\, e^{ikx} + \frac{V_2}{2\pi}\int_0^{\infty} dx\, e^{-ikx} \\ &= \frac{V_1+V_2}{2}\delta(k) + \frac{i}{2\pi}(V_1 - V_2)P(1/k)\ , \end{aligned} \tag{2.35}$$

[1]Για να αποδειχθεί η τελευταία γραμμή στην παρακάτω σχέση χρησιμοποιούμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dk\ e^{ikx} &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{\infty} dk\ e^{ikx-\epsilon x} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{i}{x+i\epsilon} = iP(1/x) + \pi\delta(x)\ , \\ \int_{-\infty}^{0} dk\ e^{ikx} &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{\infty} dk\ e^{-ikx-\epsilon x} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{-i}{x-i\epsilon} = -iP(1/x) + \pi\delta(x)\ , \end{aligned}$$

όπου

$$P(1/x) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{x}{x^2+\epsilon^2}\ , \qquad \delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}\ .$$

όπου δ και P είναι η δ-συνάρτηση και η κύρια τιμή, αντίστοιχα. Άρα

$$
\begin{aligned}
\Phi(x,y) &= \frac{V_1+V_2}{2} + \frac{i}{2\pi}(V_1-V_2)\int_{-\infty}^{\infty} dk\, P(1/k)\, e^{ikx-|k|y} \\
&= \frac{V_1+V_2}{2} - \frac{V_1-V_2}{\pi}\int_0^{\infty} dk\, \frac{\sin kx}{k} e^{-ky} \\
&= \frac{V_1+V_2}{2} - \frac{V_1-V_2}{\pi}\tan^{-1}\frac{x}{y}\ .
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Ισοδυναμία με την (2.33) αποδεικνύεται με χρήση της ταυτότητας $\tan^{-1} z + \tan^{-1} 1/z = \pi/2$.

Αρμονική συνάρτηση εντός μοναδιαίου κύκλου: Επιλύστε την εξίσωση Laplace με οριακές συνθήκες

$$
\Phi(1,\phi) = \left\{ \begin{array}{ll} V_1\,, & 0 \leqslant \phi < \pi \\ V_2\,, & \pi < \phi \leqslant 2\pi \end{array} \right\} . \tag{2.37}
$$

Απ' τον τύπο του Poisson έχουμε

$$
\begin{aligned}
\Phi(\rho,\phi) &= \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta\, \Phi(1,\theta)}{1-2\rho\cos(\theta-\phi)+\rho^2} \\
&= \frac{V_1(1-\rho^2)}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1-2\rho\cos(\theta-\phi)+\rho^2} \\
&\quad + \frac{V_2(1-\rho^2)}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2\rho\cos(\theta-\phi)+\rho^2}
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

Κάνοντας χρήση του

$$
\frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1-2\rho\cos(\theta-\phi)+\rho^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{2\rho\sin\phi}{1-\rho^2}\ , \tag{2.39}
$$

έχουμε ότι

$$
\Phi(\rho,\phi) = \frac{V_1+V_2}{2} + \frac{V_1-V_2}{\pi}\tan^{-1}\frac{2\rho\sin\phi}{1-\rho^2}\ . \tag{2.40}
$$

3 Σύμμορφη απεικόνιση

Για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα το οποίο ανάγεται στην εξίσωση Laplace αρκεί να βρούμε μια μιγαδική συνάρτηση της οποίας το πραγματικό μέρος ικανοποιεί συγκεκριμένες οριακές συνθήκες.

Μια απεικόνιση του σημείου $z = x + iy$ ενός χώρου $\Omega \subset \mathbb{C}$ στο σημείο $w = \xi + i\eta$ είναι της μορφής

$$w = f(z) \quad \Longrightarrow \quad \xi = u(x, y) \ , \quad \eta = v(x, y) \ . \tag{3.1}$$

Ο χώρος Ω απεικονίζεται στον $D = f(\Omega) \subset \mathbb{C}$. Η απεικόνιση πρέπει να είναι ένα προς ένα και ότι ο αντίστροφος μετασηματισμός, δηλαδή ο μετασχηματισμός $z = f^{-1}(w)$, υπάρχει. Επειδή

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{f'(z)} \ , \tag{3.2}$$

ϑα πρέπει $f'(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$.

Γενικά το στοιχείο επιφανείας μετασχηματίζεται ως

$$d\xi d\eta = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = (\partial_x u \partial_y v - \partial_y u \partial_x v) dx dy \ . \tag{3.3}$$

Όμως αν οι u, v δίνονται μέσω μιας μιγαδικής συνάρτησης ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy–Riemann (1.10), οπότε

$$d\xi d\eta = (\partial_x u^2 + \partial_y u^2) dx dy = 4|f'(z)|^2 dx dy \ . \tag{3.4}$$

Ένας μετασχηματισμός της μορφής (3.1) ονομάζεται σύμμορφος γιατί διατηρεί τις γωνίες που σχηματίζουν δύο καμπύλες όταν τέμνονται καθώς και την φορά τους. Πράγματι, κοντά στο σημείο $w_0 = f(z_0)$ έχουμε ότι

$$w - w_0 \simeq f'(z_0)(z - z_0) \ . \tag{3.5}$$

Μια καμπύλη C_i στον $\mathbb{C}$ που διέρχεται απ΄ το σημείο z_0 γράφεται κοντά σε αυτό ως $z - z_0 = |z - z_0| e^{i\phi_i}$ με αντίστοιχη σχέση στον χώρο D με γωνία θ_i. Απ΄ την (3.1) έχουμε ότι

$$|w - w_0| e^{i\theta_i} \simeq |f'(z_0)||z - z_0| e^{i(\phi_0 + \phi_i)} \ . \tag{3.6}$$

Άρα $\phi_0 = \theta_i - \phi_i$ για όλες τις καμπύλες που διέρχονται απ΄ το z_0. Για οποιεσδήποτε δύο τέτοιες καμπύλες $\phi_0 = \theta_1 - \phi_1 = \theta_2 - \phi_2$. Άρα $\theta_1 - \theta_2 = \phi_1 - \phi_2$, δηλαδή οι γωνία μεταξύ των καμπυλών διατηρείται. Επίσης σε κάθε γωνία προστίθεται η ίδια γωνία ϕ_0, οπότε και η φορά των γωνιών διατηρείται απ΄ τον μετασχηματισμό.

3.1 Σύμμορφοι μετασχηματισμοί και εξίσωση Laplace

Θεωρείστε την εξίσωση Laplace στο επίπεδο w.

$$0 = \partial_w \partial_{\bar{w}} \Psi = \frac{1}{|f'(z)|^2} \partial_z \partial_{\bar{z}} \Psi \ . \tag{3.7}$$

Συμπεραίνουμε ότι οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί διατηρούν την εξίσωση Laplace. Μπορούμε να βρούμε λύσεις στο ένα ή το άλλο επίπεδο και να τις μετασχηματίσουμε στο άλλο. Θα πρέπει να δούμε με προσοχή πως μετασχηματίζονται τα σύνορα των χώρων και οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες. Επίσης σημειώνω ότι και η αντίστοιχη της Laplace εξίσωση Green διατηρείται καθότι επίσης $\delta^{(2)}(w, \bar{w}) = \delta^{(2)}(z, \bar{z})/|f'(z)|^2$.

3.2 Βασικά παραδείγματα

Μετατόπιση: $w = z + a$. Μετατόπιση κατά $a \in \mathbb{C}$.

Περιστροφή: $w = e^{i\phi} z$. Περιστροφή κατά γωνία ϕ, αντίθετα (με) τη φορά των δεικτών του ρολογιού αν $\phi > 0\,(< 0)$.

Έκταση ή συστολή: $w = az$. Έχουμε έκταση (συστολή) αν $a > 1\,(0 < a < 1)$.

Αντιστροφή: $w = 1/z$. Το εσωτερικό και εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου απεικονίζονται το ένα στο άλλο.

Μιγαδικό επίπεδο στον μοναδιαίο κύκλο: Ο σύμμορφος μετασχηματισμός

$$w = \frac{i - z}{i + z} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = i\frac{1 - w}{1 + w} \ , \tag{3.8}$$

απεικονίζει το πάνω μιγαδικό επίπεδο z εντός μοναδιαίου κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων στο μιγαδικό επίπεδο w. Πράγματι γράφοντας $z = x + iy$, έχουμε ότι

$$|w| = \sqrt{\frac{x^2 + (1 - y)^2}{x^2 + (1 + y)^2}} \leqslant 1 \ , \quad -\infty < x < \infty \ , \quad y \geqslant 0 \ . \tag{3.9}$$

Ο άξονας x απεικονίζεται στην περιφέρεια του κύκλου όπου $w = e^{2i\phi}$, με $\tan\phi = x$. Ποιό γενικά έχουμε

$$w = e^{i\theta_0} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \ , \qquad \mathrm{Im} z_0 > 0 \ . \tag{3.10}$$

Το σημείο $z = z_0$ απεικονίζεται στο σημείο $w = 0$. Για $y = 0$ έχουμε τον μοναδιαίο κύκλο. Για $|x| \to \infty$, παίρουμε προσεγγιστικά ότι $w = e^{i(\theta_0 - 2\mathrm{Im} z_0/x)}$. Άρα το $x \to -\infty$ ξεκινά στον μοναδιαίο κύκλο με μια γωνία λίγο μεγαλύτερη από θ_0 και για $x \to \infty$ πλησιάζει ξανά τη γωνία θ_0 διαγράφοντας τον κύκλο αντίθετα απ΄ τους δείκτες του ρολογιού. Η περίπτωση (3.10) αντιστοιχεί σε $z_0 = i$ και $\theta_0 = \pi$.

Άπειρο τμήμα του μιγαδικού επίπεδο με γωνία στο άνω μιγαδικό επίπεδο: Ο σύμμορφος μετασχηματισμός

$$w = z^m \ , \qquad m \geqslant \frac{1}{2} \ , \tag{3.11}$$

απεικονίζει το μέρος του μιγαδικού επιπέδου z με εσωτερική γωνία π/m, στο άνω μιγαδικό επίπεδο w.

Λωρίδα στο άνω μιγαδικό επίπεδο: Ο σύμμορφος μετασχηματισμός

$$w = e^{\pi z/a} \ , \tag{3.12}$$

απεικονίζει την περιοχή ανάμεσα σε δύο παράλληλες γραμμές που απέχουν a στο άνω μέρος του μιγαδικού επιπέδου z με εσωτερική γωνία π/m στο άνω μιγαδικό επίπεδο w. Η απόδειξη γίνεται απ΄ την προηγούμενη περίπτωση αν θέσουμε $z \to z + L$, $m = \pi L/a$ και πάρουμε το όριο $L \to \infty$.

3.3 Ο μετασχηματισμός Schwarz–Christoffel

Ο μετασχηματισμός των Schwarz–Christoffel που απεικονίζει το **εσωτερικό ενός ανοικτού πολυγώνου** στο επίπεδο z με N κορυφές με εσωτερικές γωνίες α_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ και εξωτερικές γωνίες ϕ_k, στο πάνω μιγαδικό επίπεδο w

$$\frac{dz}{dw} = A \prod_{k=1}^{N} (w - x_k)^{-\phi_k/\pi} \ , \qquad \phi_k = \pi - \alpha_k \ , \tag{3.13}$$

όπου τα σημεία x_k κείνται επί της πραγματικής ευθείας στο επίπεδο w. Τρία σημεία μπορούν επιλεγούν αυθαίρετα. Η απόδειξη είναι απλή. Πλησίον ενός σημείο μπορούμε να χρημοποιήσουμε την (3.11) και να γράψουμε $z = w^{1/m}$, οπότε προσεγγιστικά $z = dz/dw \sim z^{1/m-1}$. Επεκτείνοντας τον παραπάνω συλλογισμό αποδεικνύεται η (3.13).

3.3.1 Παραδείγματα

Ημιάπειρη λωρίδα στο άνω μιγαδικό επίπεδο: Ο σύμμορφος μετασχηματισμός

$$w = \sin \pi z/a \ , \tag{3.14}$$

απεικονίζει την περιοχή ανάμεσα σε δύο παράλληλες γραμμές που απέχουν a στο άνω μέρος του μιγαδικού επιπέδου z, στο άνω μιγαδικό επίπεδο w. Για να τον αποδείξουμε χρησιμοποιούμε την (3.13) με $N = 2$ και $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$ και εκτελούμε το ολοκλήρωμα. Η επιλογή $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$ να αντιστοιχούν σε $z = \pm a/2$ οδηγεί σε $A = a/\pi$.

Ισόπλευρο τρίγωνο στο άνω μιγαδικό επίπεδο: Απ΄ τον μετασχηματισμό Schwarz–Christoffel έχουμε επιλέγοντας τρία σημεία να είναι $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ ότι

$$z(w) = A \int dw \left(w(1-w^2)\right)^{-2/3} + z_0 \ . \tag{3.15}$$

Επιλέγοντας τις σταθερές

$$z(w) = \frac{3\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi/3}\,\Gamma(1/6)} \left(w(1-w^2)\right)^{1/3} {}_2F_1(1/2, 1, 7/6, w^2) - \frac{1}{2} \ , \tag{3.16}$$

όπου η ${}_2F_1$ είναι η υπεργεωμετρική συνάρτηση. Οι σταθερές A και η σταθερά ολοκλήρωσης στον μετασχηματισμό Schwarz–Christoffel (3.13) έχουν επιλεγεί έτσι ώστε το ισόπλευρο τρίγωνο να έχει, στο επίπεδο z, κορυφές στα σημεία $(-1/2, 0), (1/2, 0), (0, \sqrt{3}/2)$.

Επίλυση εξίσωσης Laplace εντός γωνίας: Έστω οι οριακές συνθήκες

$$\Phi(x, 0) = \left\{ \begin{array}{ll} V_1 \, , & \text{upper edge} \\ V_2 \, , & \text{lower edge with } x > 0 \end{array} \right\} . \tag{3.17}$$

Έχουμε απ΄ την (3.11) ότι

$$w = re^{i\theta} = z^m = \rho^m e^{im\phi} \ , \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{m} \ , \tag{3.18}$$

όπου η γωνία είναι στο επίπεδο z. Άρα

$$r = \rho^m \ , \qquad \theta = m\phi \ . \tag{3.19}$$

Στο επίπεδο w η λύση δίνεται απ΄ την (2.33). Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\Phi(x, y) = V_2 + m\frac{V_1 - V_2}{\pi}\,\phi = V_2 + m\frac{V_1 - V_2}{\pi}\,\tan^{-1}\frac{y}{x} \ , \tag{3.20}$$

η οποία λύση ικανοποιεί προφανώς τις οριακές συνθήκες για $\phi = 0$ $(y = 0)$ και για $\phi = \pi/m$ $(y/x = \tan \pi/m)$.