8 Δεκεμβρίου 2017

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων,
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Αθήνα, 15784

Μαθηματική Φυσική - 7ο Εξάμηνο

Διάφορα θεωρητικά θέματα και λυμένες ασκήσεις

1 Διάφορα θεωρητικά θέματα

1.1 Η συνάρτηση Dedekind

Η συνάρτηση Dedekind η ορίζεται ως

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = q^{\frac{1}{24}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(3n^2-n)/2} \ , \tag{1.1}$$

όπου

$$q = e^{2\pi i \tau} \ , \quad \mathrm{Im}\tau > 0 \ . \tag{1.2}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\boxed{\eta(\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{12}} \eta(\tau)} \ . \tag{1.3}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= e^{-\frac{\pi i}{12\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{\pi i}{\tau}(3n^2-n)} \\ &= e^{-\frac{\pi i}{12\tau}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n(6n-1)\frac{1}{\tau}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(2n+1)(3n+1)\frac{1}{\tau}} \right) \ , \end{aligned} \tag{1.4}$$

όπου έχω χωρίσει το άθροισμα σε άρτιους και περιττούς. Κατόπιν εφαρμόζουμε επανάθροιση Poisson τα δύο μέρη ξεχωριστά και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \frac{\sqrt{-i\tau}}{2\sqrt{3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i \tau}{12} n^2} \left(e^{-\frac{n\pi i}{6}} - e^{\frac{5n\pi i}{6}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{-i\tau}}{2\sqrt{3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{5} e^{\frac{\pi i \tau}{12}(6n+s)^2} (-1)^n \left(e^{-\frac{\pi i s}{6}} - e^{\frac{5\pi i s}{6}} \right) \ , \end{aligned} \tag{1.5}$$

όπου χρησιμοποίησα ότι κάθε ακέραιος γράφεται ως $n = 6n' + s$, $s = 0, 1, \ldots, 5$. Εύκολα βρίσκουμε ότι οι όροι με $s = 0, 2, 4$ δίνουν μηδέν, ο καθένας χωριστά. Για $s = 3$ παίρνουμε έναν όρο ανάλογο του

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{3\pi i \tau}{4}(2n+1)^2} = 0 \ . \tag{1.6}$$

Οι όροι με $s = 1$ και $s = 5$ δίνουν

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{-i\tau}}{2\sqrt{3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i \tau}{12}(6n+1)^2} (-1)^n \left(e^{-\frac{\pi i}{6}} - e^{\frac{5\pi i}{6}} - e^{-\frac{5\pi i}{6}} + e^{\frac{25\pi i}{6}} \right) \ , \tag{1.7}$$

όπου για $s = 5$ άλλαξα n κατά 1. Ο όρος στην παρένθεση ισούται με $4\cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$ και αλλάζοντας $n \to -n$ στην άθροιση παίρνουμε

$$\boxed{\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\;\eta(\tau)} \,. \tag{1.8}$$

1.2 Θεώρημα Green

Θεωρούμε δυο συναρτήσεις ϕ και ψ εντός όγκου V με σύνορο επιφάνειας S. Απ΄ το θεώρημα Stokes έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_V dV \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) &= \oint_S dS \hat{n} \cdot \phi \nabla \psi \ . \\
\int_V dV \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) &= \oint_S dS \hat{n} \cdot \psi \nabla \phi \ .
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια με φορά προς τα έξω. Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$
\boxed{\int_V dV (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \oint_S dS \hat{n} \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi)} \ , \tag{1.10}
$$

που είναι το θεώρημα Green.

θεωρούμε τη συνάρτηση Green $G(x, x')$ που ικανοποιεί την

$$
\nabla^2 G(x, x') = -4\pi \delta^{(3)}(x - x') \ . \tag{1.11}
$$

Η γενική λύση της μπορεί πάντα να γραφτεί στη μορφή

$$
G(x, x') = \frac{1}{|x - x'|} + F(x, x') \ , \tag{1.12}
$$

όπου $\nabla^2 F(x, x') = 0$ και η F επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στην S. Η F μπορεί να ειδωθεί ως να απορρέει από φορτία εκτός του όγκου V, όπως γίνεται με τη μέθοδο των ειδώλων. Επίσης έχουμε $G(x, x') = G(x', x)$ και η αντίστοιχη συνάρτηση Φ επιλύει την εξίσωση Poisson.

Επιλέγουμε $\phi = \Phi$ και $\psi = G$. Απ΄ το θεώρημα Green έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\int_V dV' \big[\Phi(x') \underbrace{\nabla'^2 G(x, x')}_{-4\pi\delta^{(3)}(x-x')} - G(x, x') \underbrace{\nabla'^2 \Phi(x')}_{-4\pi\rho(x')}\big] \\
&= \oint_S dS' \hat{n}' \cdot \big[\Phi(x') \nabla' G(x, x') - G(x, x') \nabla' \Phi(x')\big] \ .
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

Άρα βρίσκουμε ότι

$$
\boxed{\Phi(x) = \int_V dV' \rho(x') G(x, x') + \frac{1}{4\pi} \oint_S dS' \hat{n}' \cdot \big[G(x, x') \nabla' \Phi(x') - \Phi(x') \nabla' G(x, x')\big]} \ , \tag{1.14}
$$

όπου $x \in V$.

1.2.1 Dirichlet οριακές συνθήκες

Αυτές είναι

$$G_D(x, x')\Big|_{x' \in S} = 0 \tag{1.15}$$

και επιλέγονται όταν έχουμε καθορισμένες συνοριακές συνθήκες για την $\Phi(x)$ για $x \in S$. Τότε

$$\boxed{\Phi(x) = \int_V dV' \rho(x') G_D(x, x') - \frac{1}{4\pi} \oint_S dS' \hat{n}' \cdot \Phi(x') \nabla' G(x, x')} \ . \tag{1.16}$$

1.2.2 Neumann οριακές συνθήκες

Έχουμε απ΄ την εξίσωση Green

$$\boxed{\oint_S dS' \hat{n}' \cdot \nabla' G(x, x') = -4\pi} \ . \tag{1.17}$$

Άρα η συνθήκη για την παράγωγο πρέπει να ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη. Η βολικότερη επιλογή είναι

$$\boxed{\nabla' G_N(x, x') = -\frac{4\pi}{S} \hat{n}'} \ . \tag{1.18}$$

όπου S η ολική επιφάνεια του συνόρου. Τότε

$$\boxed{\Phi(x) = \int_V dV' \rho(x') G(x, x') + \frac{1}{4\pi} \oint_S dS' \hat{n}' \cdot G(x, x') \nabla' \Phi(x') + \langle \Phi \rangle_S} \ , \tag{1.19}$$

όπου

$$\langle \Phi \rangle_S = \frac{1}{S} \oint_S dS \Phi(x) \ , \tag{1.20}$$

είναι η μέση τιμή του δυναμικού στην επιφάνεια.

2 Λυμένες ασκήσεις

2.1 Άσκηση

Ορθός κύλινδρος ακτίνας R έχει άξονα που συμπίπτει με τον άξονα των z, και εκτείνεται στο χώρο με $z \geqslant 0$. Επιλύστε την εξίσωση Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ εντός του κυλίνδρου εάν στην επίπεδη πλευρά του έχουμε τη συνοριακή συνθήκη

$$\Phi\Big|_{z=0} = V \ , \tag{2.1}$$

όπου V σταθερά και μηδέν στην κυκλική πλευρά του.

ΛΥΣΗ

Η λύση είναι της μορφής

$$\Phi(\rho, z) = (Ae^{kz} + Be^{-kz})J_0(k\rho) \ , \tag{2.2}$$

όπου k η σταθερά διαχωρισμού των μεταβλητών και J_0 η συνάρτηση Bessel. Επειδή $\Phi(R, z) = 0$ έχουμε ότι μόνο οι τιμές του k που ικανοποιούν την

$$J_0(x_n) = 0 \ , \qquad x_n = k_n R \ , \quad n = 1, 2, \dots \ , \tag{2.3}$$

επιτρέπονται. Τα σημεία x_n όπου η J_0 μηδενίζεται προσδιορίζονται με αριθμητικές μεθόδους και έχουν καταχωρισθεί σε πίνακες. Αθροίζοντας σε όλες τις τιμές του n έχουμε τη γενική λύση

$$\Phi(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{k_n z} J_0(k_n\rho) \ , \tag{2.4}$$

όπου έχουμε ήδη εξασφαλίσει ότι η λύση είναι πεπερασμένη για $z \to \infty$. Λόγω της $\Phi(\rho, 0) = V$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n\rho) = V \ , \tag{2.5}$$

οπότε με χρήση της ορθογωνιότητας των συναρτήσεων Bessel

$$A_n = \frac{2V}{R^2 J_1^2(x_n)} \int_0^R d\rho\rho \ J_0(k_n\rho) = \frac{2V}{x_n^2 J_1^2(x_n)} \int_0^{x_n} dx \ xJ_0(x) \ . \tag{2.6}$$

Επειδή $xJ_0(x) = (xJ_1(x))'$, το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα και έχουμε

$$A_n = \frac{2V}{x_n J_1(x_n)} \ . \tag{2.7}$$

Η λύση τελικά γράφεται

$$\Phi(\rho, z) = 2V \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-k_n z}}{x_n J_1(x_n)} J_0(k_n\rho) \ . \tag{2.8}$$

2.2 Άσκηση

Δύο παράλληλες πλάκες απείρων διαστάσεων τέμνουν τον άξονα των x στα σημεία $x = 0$ και $x = L$. Θερμότητα εισέρχεται από την πλάκα στ΄ αριστερά ενώ η δεξιά είναι τέλειος μονωτής. Η αρχική θερμοκρασία είναι παντού T_0.

α) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση που πρέπει να επιλύσετε καθώς και τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες. Χρησιμοποιήστε το λιγότερο δυνατό αριθμό παραμέτρων.

β) Υπολογίστε την θερμοκρασία παντού στο χώρο και για κάθε χρονική στιγμή. Ποιά η κατάσταση σταθερής θερμοκρασίας και πως ερμηνεύεται φυσικά;

γ) Δείξτε ότι αν από τη δεξιά πλάκα εξέρχεται θερμότητα, τότε με κατάλληλο μετασχηματισμό της θερμοκρασίας το πρόβλημα ανάγεται σε αυτό της περίπτωσης α).

ΛΥΣΗ

α) Θα πρέπει να λύσουμε τη μονοδιάσταση εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \ , \qquad T = T(x,t) \ , \tag{2.1}$$

με τις ακόλουθες συνοριακές και αρχικές συνθήκες

$$T(x,0) = T_0 \ , \qquad \partial_x T|_{x=0} = -Q \ , \qquad \partial_x T|_{x=L} = 0 \ . \tag{2.2}$$

Αν η διάσταση του x είναι μήκος, τότε η διάσταση του t είναι (μήκος)^2. Η διάσταση του $Q > 0$ είναι (θερμοκρασία)/(μήκος).

β) Το πρόβλημα με τις συνοριακές συνθήκες είναι ότι δεν επιτρέπουν απευθείας λύσεις με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Αλλάζουμε ανεξάρτητη μεταβλητή ως

$$T(x,t) = T_0 + T_p(x,t) + T_c(x,t) \ , \tag{2.3}$$

έτσι ώστε και οι δύο όροι να ικανοποιούν την (2.1) με συνοριακές συνθήκες

$$\partial_x T_p|_{x=0} = -Q \ , \qquad \partial_x T_p|_{x=L} = 0 \ , \qquad \partial_x T_c|_{x=0} = \partial_x T_c|_{x=L} = 0 \ . \tag{2.4}$$

Για την T_p εύκολα βλέπουμε ότι η λύση

$$T_p(x,t) = \frac{Q}{2L}(x-L)^2 + \frac{Q}{L}\ t \ , \tag{2.5}$$

ικανοποιεί τις σχετικές συνοριακές συνθήκες. Η T_c πρέπει να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$T_c(x,0) = -\frac{Q}{2L}(x-L)^2 \ . \tag{2.6}$$

Η εξίσωση (2.1) για την T_c επιδέχεται λύσεις με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών της μορφής

$$T_c \sim e^{-n^2\pi^2 t/L^2} \cos\frac{n\pi}{L}x \ , \qquad n = 0, 1, \dots \ , \tag{2.7}$$

οι οποίες οποίες ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες στην (2.4). Η γενικότερη λύση είναι γραμμικός συνδιασμός της μορφής

$$T_c(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t/L^2} \cos\frac{n\pi}{L}x \ . \tag{2.8}$$

Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη (2.6) παίρνουμε

$$-\frac{Q}{2L}(x-L)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{L}x \ , \tag{2.9}$$

απ΄ το οποίο βρίσκουμε τους συντελεστές A_n ως

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{Q}{L^2}\int_0^L dx\ (x-L)^2 \cos\frac{n\pi x}{L} = -\frac{2}{n^2\pi^2}\ QL \ , \qquad n = 1, 2, \dots \\ A_0 &= -\frac{Q}{2L^2}\int_0^L dx\ (x-L)^2 = -\frac{1}{6}\ QL \ . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Βλέπουμε ότι για $t \gg L^2$, η θερμοκρασία αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο. Ο λόγος είναι ότι απ΄ το σύνορο στο $x = 0$ εισρέει σε μόνιμη βάση θερμότητα.

γ) Η μόνη διαφορά είναι ότι $\partial_x T|_{x=L} = -Q'$. Θέτοντας $\bar{T} = T + Q'x$, παρατηρούμε ότι η $\bar{T}$ ικανοποιεί όλες τις συνθήκες της περίπτωσης α) με $Q \to Q - Q'$.

2.3 Άσκηση

Η διαφορική εξίσωση

$$\nabla^2 T + g = \partial_t T \ , \tag{2.11}$$

περιγράφει διάχυση θερμότητας παρουσία πηγής παραμετροποιούμενη απ΄ τη συνάρτηση $g(\mathbf{x}, t)$. Μια σφαίρα ακτίνας R βρίσκεται αρχικά σε μηδενική θερμοκρασία, η δε επιφάνειά της κρατείται σε μηδενική θερμοκρασία καθόλη τη διάρκεια. Βρείτε τη θερμοκρασία της σφαίρας ως αποτέλεσμα της θερμότητας που γεννά η πηγή, θεωρώντας την απλούστερη των περιπτώσεων κατά την οποία η συνάρτηση g=σταθερά.

ΛΥΣΗ

Λόγω συμμετρίας έχουμε $T = T(r,t)$ σε σφαιρικές συντεταγμένες. Άρα η εξ. (2.11) γράφεται ως

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r T\right) + g = \partial_t T \ , \tag{2.12}$$

με συνοριακές και αρχικές συνθήκες

$$T(R,t) = 0 \ , \qquad T(r,0) = 0 \ . \tag{2.13}$$

Λόγω του ότι απάγεται θερμότητα απ΄ την επιφάνεια του κυλίνδρου, για πολύ μεγάλους χρόνους αποκαθίσταται σταθερή ως προς το χρόνο θερμοκρασία $T_\infty(r)$. Η τελευταία ικανοποιεί την (2.12) με το δεξί μέλος μηδέν, δηλαδή

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r T_\infty\right) + g = 0 \tag{2.14}$$

και συνοριακή συνθήκη

$$T_\infty(R) = 0 \ . \tag{2.15}$$

Η πεπερασμένη λύση της στο $r = 0$ είναι

$$T_\infty(\rho) = \frac{gR^2}{6}\left(1 - r^2/R^2\right) \ . \tag{2.16}$$

Γράφουμε τη γενική λύση της (2.12) ως $T(r,t) = T_\infty(r) + T_c(r,t)$ με την T_c να ικανοποιεί την εξίσωση διάχυσης

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r T_c\right) = \partial_t T_c \ , \tag{2.17}$$

με αρχική και συνοριακή συνθήκη

$$T_c(R,t) = 0 \ , \qquad T_c(r,0) = -T_\infty(r) = -\frac{gR^2}{6}\left(1 - r^2/R^2\right) \ . \tag{2.18}$$

Με χωρισμό μεταβλητών η (2.17) επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$T_c(r,t) \sim F(r)e^{-k^2 t} \ , \tag{2.19}$$

όπου η $F(r)$ ικανοποιεί την

$$F'' + \frac{2}{r}F' + k^2 F = 0 \ . \tag{2.20}$$

Η γενική λύση της τελευταίας είναι της μορφής $F = (A\sin kr + B\cos kr)/r$. Για να είναι πεπερασμένη στο $r = 0$ θέτουμε $B = 0$, ενώ η οριακή συνθήκη $F(R) = 0$ σημαίνει ότι $k_n = n\pi/R$, $n = 1, 2, \ldots$. Άρα η γενική λύση της $T_c(r,t)$ γράφεται ως

$$T_c(r,t) = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n r e^{-k_n^2 t} \ . \tag{2.21}$$

Απ΄ την αρχική συνθήκη βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} A_n \int_0^R dr\ \sin^2\frac{n\pi r}{R} &= -\frac{gR^2}{6}\left(\int_0^R dr\ r\sin\frac{n\pi r}{R} - \frac{1}{R^2}\int_0^R dr\ r^3\sin\frac{n\pi r}{R}\right) \\ \Longrightarrow \qquad A_n &= 2\frac{(-1)^n}{(n\pi)^3} gR^3 \ . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Τελικά η γενική λύση για την θερμοκρασία είναι

$$T(r,t) = \frac{gR^2}{6}\left(1 - r^2/R^2\right) + 2\frac{gR^3}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n\pi)^3}\sin k_n r e^{-k_n^2 t} \ , \qquad k_n = \frac{n\pi}{R} \ . \tag{2.23}$$

2.4 Άσκηση

Θεωρήστε ότι η πυκνότητα νετρονίων εντός δοχείου δεδομένου σχήματος ικανοποιεί την εξίσωση

$$\nabla^2 n + \lambda n = \frac{\partial n}{\partial t} \ , \tag{2.24}$$

με $n = 0$ στην επιφάνεια του. Ο 2ος όρος του αριστερού μέλους παριστάνει παραγωγή νετρονίων ανάλογη του πληθυσμού τους και μπορεί να οδηγήσει σε αστάθεια του συστήματος, με την έννοια ότι $n \sim e^{t/\tau}$, και επακόλουθη έκρηξη. Αυτό συμβαίνει όταν οι διαστάσεις του δοχείου ξεπερνούν κάποιο κριτικό όριο.

Θεωρήστε σφαιρικό δοχείο ακτίνας R. Βρείτε την $R_{\rm cr}$ σύμφωνα με τα παραπάνω σχόλια.

ΛΥΣΗ

Είναι προφανές ότι με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών υπάρχουν λύσεις της μορφής

$$n(\mathbf{x}, t) = \eta_0(r)\ e^{-k^2 t} \ , \tag{2.25}$$

όπου η ακτινική συνάρτηση $\eta_0(r)$ υπακούει την

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\eta_0}{dr}\right) + (\lambda + k^2)\eta_0 = 0 \ , \qquad 0 \leqslant r \leqslant R \ , \qquad \eta_0(R) = 0 \ . \tag{2.26}$$

Η πεπερασμένη λύση της στο $r = 0$ είναι

$$\eta_0(r) \sim \frac{\sin\sqrt{\lambda + k^2}\ r}{r} \ . \tag{2.27}$$

Η οριακή συνθήκη στο $r = R$ επιλέγει διακριτές τιμές για την σταθερά k ως

$$k_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{R^2} - \lambda \ , \qquad n = 1, 2, \ldots \ . \tag{2.28}$$

Ευστάθεια της λύσης σημαίνει ότι $k_n^2 \geqslant 0$, $\forall\ n$. Άρα

$$R \leq R_{\rm cr} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \ , \tag{2.29}$$

που αντιστοιχεί στην τιμή $n = 1$. Άρα ο κριτικός όγκος, πέραν του οποίου έχουμε αστάθεια, είναι

$$\text{σφαίρα :} \qquad V_{\rm cr} = \frac{4\pi^4}{3}\frac{1}{\lambda^{3/2}} \simeq \frac{129.9}{\lambda^{3/2}} \ . \tag{2.30}$$

2.5 Άσκηση

α) Να βρεθεί η θερμοκρασία $T(\theta, t)$ σφαιρικού κελύφους ακτίνας R με αρχική θερμοκρασία

$$T(\theta, 0) = Q\frac{\delta(\theta)}{2\pi R^2 \sin\theta} , \tag{2.31}$$

όπου $\theta \in [0, \pi]$ η πολική γωνία σε σφαιρικές συντεταγμένες, $\delta(\theta)$ η δ-συνάρτηση και Q σταθερά.

β) Προσδιορείστε τη θερμοκρασία σταθερής κατάστασης για $t \to \infty$.

γ) Δείξτε ότι στο όριο $R \to \infty$ παίρνουμε τα γνωστά αποτελέσματα για διάχυση θερμότητας στο επίπεδο.

ΛΥΣΗ

α) Λόγω συμμετρίας $T = T(\theta, t)$. Με χωρισμό μεταβλητών εύκολα βρίσκουμε ότι η θερμοκρασία πρέπει να είναι της μορφής $T = \Theta(\theta)e^{-k^2 t}$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση διάχυσης της θερμότητας βρίσκουμε ότι η συνάρτηση $\Theta(\theta)$ ικανοποιεί την

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + k^2R^2\Theta = 0 , \tag{2.32}$$

η οποία είναι η εξίσωση Legendre με $k^2R^2 = \ell(\ell+1)$. Άρα η γενική λύση γράφεται ως

$$T(\theta, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(\cos\theta)e^{-\ell(\ell+1)t/R^2} . \tag{2.33}$$

Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη

$$Q\frac{\delta(\theta)}{2\pi R^2 \sin\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(\cos\theta) . \tag{2.34}$$

Για τον προσδιορισμό των σταθερών A_ℓ χρησιμοποιούμε την ορθογωνιότητα των πολυωνύμων Legendre

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta P_\ell(\cos\theta)P_{\ell'}(\cos\theta) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'} . \tag{2.35}$$

Λόγω του ότι $P_\ell(1) = 1$, έχουμε

$$A_\ell = \frac{Q}{2\pi R^2}\left(\ell + \frac{1}{2}\right) . \tag{2.36}$$

Τελικά

$$T(\theta, t) = \frac{Q}{2\pi R^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\ell + \frac{1}{2}\right)P_\ell(\cos\theta)e^{-\ell(\ell+1)t/R^2} . \tag{2.37}$$

β) Η θερμοκρασία σταθερής κατάστασης βρίσκεται για $t \to \infty$, οπότε στο παραπάνω άπειρο άθροισμα μόνο ο όρος με $\ell = 0$ συνεισφέρει. Βρίσκουμε

$$T_\infty = T(\theta, \infty) = \frac{Q}{4\pi R^2} \ . \tag{2.38}$$

γ) Θα πάρουμε το όριο $R \to \infty$. Τότε θέτουμε $\ell = kR$ και χρησιμοποιούμε ότι

$$\lim_{R\to\infty} P_{kR}\left(\cos\frac{\rho}{R}\right) = J_0(k\rho) \ . \tag{2.39}$$

Τότε

$$T(\rho, t) = \frac{T_0}{2\pi}\int_0^\infty dk\ kJ_0(k\rho)e^{-k^2 t} = \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{4\pi t} \ , \tag{2.40}$$

που είναι το σωστό όριο για τη λύση της εξίσωσης διάχυσης σε όλο το επίπεδο με αρχική συνθήκη $T(\rho, 0) = T_0\dfrac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}$.

2.6 Άσκηση

Θεωρείστε το διαφορικό τελεστή

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} \ , \qquad 0 \leqslant x < \infty \ . \tag{2.41}$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις $\Psi(x)$ και τις ιδιοτιμές του E με την αυτο-συζυγή οριακή συνθήκη

$$\Psi'(0) = \Psi(0)\cot\theta \ , \tag{2.42}$$

όπου θ σταθερή γωνία.

α) Δείξτε ότι αν $\tan\theta < 0$ τότε εκτός απ' το συνεχές μέρος του φάσματος υπάρχει μόνο μια επιπλέον κανονικοποιήσιμη ιδιοσυνάρτηση με αρνητική ιδιοτιμή εντοπισμένη κοντά στο $x = 0$. Υπολογίστε αυτήν την ιδιοσυνάρτηση κανονικοποιώντας τη στη μονάδα.

β) Δείξτε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του συνεχούς φάσματος είναι της μορφής

$$\Psi_k(x) = A_k \sin(kx + \delta(k)) \ , \qquad e^{i\delta(k)} = \frac{1 + ik\tan\theta}{\sqrt{1 + k^2\tan^2\theta}} \ , \tag{2.43}$$

όπου A_k σταθερά κανονικοποίησης.

γ) Δείξτε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του συνεχούς και αυτή που αντιστοιχεί στην αρνητική ιδιοτιμή είναι ορθογώνιες.

ΛΥΣΗ

α) Μια ιδιοσυνάρτηση της μορφής

$$\Psi_0 = \frac{1}{2\kappa}e^{-\kappa x} \ , \qquad \kappa > 0 \tag{2.44}$$

έχει ιδιοτιμή $E_\kappa = -\kappa^2$ και είναι ήδη κανονικοποιημένη στη μονάδα. Εφαρμόζοντας την οριακή συνθήκη έχουμε

$$-\kappa = \cot\theta < 0 \ . \tag{2.45}$$

β) Οι συνεχείς ιδιοσυναρτήσεις παίρνουν προφανώς τη δοθείσα μορφή στην (2.43) με ιδιοτιμή $E_k = k^2$. Η οριακή συνθήκη δίνει

$$\tan\delta(k) = k\tan\theta \qquad \Longrightarrow \qquad e^{2i\delta(k)} = \frac{(\cos\theta + ik\sin\theta)^2}{\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta} \ . \tag{2.46}$$

Οι δύο λύσεις της τελευταίας είναι η δοθείσα στην (2.43) καθώς και η ίδια με το δεξί μέλος της πολλαπλασιασμένο με $e^{i\pi}$. Όμως αυτή απορρίπτεται γιατί για $\theta = 0$, η οριακή συνθήκη είναι $\Psi'(0) = 0$, δηλαδή $\delta(k) = 0$.

γ) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx\Psi_0(x)\Psi_k(x) &\sim \mathrm{Im}\left(e^{i\delta(k)}\int_0^\infty dx e^{-(\kappa-ik)x}\right)\\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\delta(k)}}{\kappa-ik}\right)\sim \mathrm{Im}\left((\kappa+ik)e^{i\delta(k)}\right)\\ &= \kappa\sin\delta(k)+k\cos\delta(k)=0\ ,\end{aligned} \tag{2.47}$$

μετά από αντικατάσταση για τις σταθερές κ και $\delta(k)$.

2.7 Άσκηση

Θεωρήστε περιοχή του n-διάστατου Ευκλείδιου χώρου και την διαφορική εξίσωση

$$L_{\mathbf{x}} T = \partial_t T \ , \qquad T = T(\mathbf{x}, t) \ , \qquad T(\mathbf{x}, 0) = \delta^{(n)}(\mathbf{x}) \ , \qquad t \geqslant 0 \ , \tag{2.48}$$

σε αυτή, όπου $L_{\mathbf{x}}$ κατάλληλος διαφορικός τελεστής. Η επίλυση του προβλήματος επιβάλλει και ανάλογες με τη φυσική περίπτωση συνοριακές συνθήκες στο σύνορο αυτού του χώρου. Δείξτε ότι η εξίσωση Green

$$L_{\mathbf{x}} G + \delta^{(n)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t') = \partial_t G \ , \qquad G = G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \ , \tag{2.49}$$

επιδέχεται λύσεις που μηδενίζονται για $t < t'$ της μορφής

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = T(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')\Theta(t - t') \ . \tag{2.50}$$

α) Θεωρήστε την μονοδιάστατη εξίσωση διάδοσης της θερμότητας όπου $L_{\mathbf{x}} = \partial_x^2$ και $-\infty < x < \infty$. Ποιά η λύση των (2.48) και (2.49);

β) Θεωρήστε όπως στο α) τη μονοδιάστατη εξίσωση διάχυσης της θερμότητας αλλά με $0 \leqslant x < \infty$ και Dirichlet οριακή συνθήκη $G\big|_{x=0} = 0$. Ποιά η λύση των (2.48) και (2.49);

γ) Θεωρήστε όπως στο α) τη μονοδιάστατη εξίσωση θερμότητας αλλά με $0 \leqslant x < \infty$ και οριακή συνθήκη $\partial_x G\big|_{x=0} = -Q$. Ποιά η λύση των (2.48) και (2.49);

ΛΥΣΗ

Η απόδειξη ότι η (2.49) ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση στην (2.48) βασίζεται στο ότι η μερική παράγωγος ∂_t στην (2.48) δίνει έναν όρο της μορφής

$$T(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')\partial_t\Theta(t - t') = T(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')\delta(t - t') = \delta^{(n)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t') \ , \tag{2.51}$$

λόγω της αρχικής συνθήκη στην (2.48).

α) Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$\partial_x^2 T = \partial_t T \ , \qquad T = T(x, t) \ , \qquad T(x, 0) = \delta(x) \ , \qquad -\infty < x < \infty \tag{2.52}$$

και την ανάπτυξη Fourier

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \ T_k(t) e^{ikx} \ . \tag{2.53}$$

Οι συντελεστές ικανοποιούν την

$$\frac{dT_k}{dt} = -k^2 T_k \ , \qquad T_k(0) = 1 \ , \qquad t \geqslant 0 \ , \tag{2.54}$$

με λύση $T_k = e^{-k^2 t}$. Άρα απ' την (2.53) έχουμε

$$T(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{ikx - k^2 t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \ . \tag{2.55}$$

Άρα

$$G(x - x', t - t') = T(x - x', t - t')\Theta(t - t') \ . \tag{2.56}$$

β) Για το σημείο $x = x'$ θεωρούμε το είδωλό του στο $x = -x'$ οπότε

$$G(x - x', t - t') = \left[T(x - x', t - t') - T(x + x', t - t')\right]\Theta(t - t') \ . \tag{2.57}$$

γ) Σε αυτή την περίπτωση

$$G(x - x', t - t') = -Qx + \left[T(x - x', t - t') + T(x + x', t - t')\right]\Theta(t - t') \ . \tag{2.58}$$

Ο πρώτος όρος περιγράφει την κατάσταση ισορροπίας απουσία της σημειακής στιγμιαίας πηγής στο $x = x'$ και για $t = t'$.

Σημειώνω ότι αν προσπαθήσουμε να ελένξουμε ότι οι λύσεις (2.57) και (2.58) υπακούουν την Green διαφορική εξίσωση παίρνουμε τον επιπλέον όρο $\delta(x + x')\delta(t - t')$. Όμως αυτός μηδενίζεται καθότι $x + x' \neq 0$.

2.8 Άσκηση

Θεωρείστε την μονοδιάστατη έξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ . \tag{2.59}$$

Παρατηρείστε τη συμμετρία της κάτω από αλλαγή κλίμακας

$$t \to \lambda^2 t \ , \qquad x \to \lambda x \ . \tag{2.60}$$

α) Βρείτε ποιά πρέπει να είναι η εξάρτηση της θερμοκρασίας ώς προς τις μεταβλητές αυτές έτσι ώστε να παραμένει αναλλοίωτη και παρουσιάστε τη γενική της λύση, αγνοώντας προς τις εάν είναι δυνατόν να ικανοποιηθούν ταυτόχρονα αρχικές ή/και συνοριακές συνθήκες.

β) Θεωρείστε την ίδια εξίσωση για $x \geqslant 0$. Το άκρο της διατηρείται σε θερμοκρασία T_0 ανά πάσα χρονική στιγμή, ενώ η αρχική της θερμοκρασία είναι μηδέν. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος α) βρείτε την θερμοκρασία σε κάθε σημείο της ως συνάρτηση του χρόνου.

γ) Θεωρείστε πάλι το ερώτημα β) αλλά με την συνοριακή συνθήκη ότι απ΄ το άκρο της ράβδου εισέρχεται θερμότητα με σταθερό ρυθμό (ειδική περίπτωση είναι το άκρο να είναι μονωμένο). Μπορεί να επιλυθεί το πρόβλημα με το αποτέλεσμα του α) και γιατί; Το ίδιο ερώτημα αν η ράβδος είναι πεπερασμένη και έχει κατάλληλη συνοριακή συνθήκη στο άλλο άκρο.

ΛΥΣΗ

α) Είναι προφανές ότι η εξάρτηση πρέπει να είναι της μορφής

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{t}} \ . \tag{2.61}$$

Υπολογίζουμε ότι

$$\partial_t T = -\frac{1}{2}\frac{\eta}{t}\frac{dT}{d\eta} \ , \qquad \partial_x T = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dT}{d\eta} \ , \qquad \partial_x^2 T = \frac{1}{t}\frac{d^2T}{d\eta^2} \ , \tag{2.62}$$

οπότε η εξίσωση διάχυσης γίνεται

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2}\frac{dT}{d\eta} = 0 \ . \tag{2.63}$$

Η γενική της λύση είναι

$$T(\eta) = A\int_0^\eta dy e^{-y^2/4} + B \ , \tag{2.64}$$

όπου A και B είναι σταθερές ολοκλήρωσης.

β) Οι αρχική και συνοριακές συνθήκες είναι

$$T(0,x) = 0 \ , \qquad T(t,0) = T_0 \ . \tag{2.65}$$

Άρα για την μεταβλητή η έχουμε

$$T(0) = T_0 \ , \qquad T(\infty) = 0 \ . \tag{2.66}$$

Με βάση αυτές η λύση είναι

$$T(\eta) = T_0 \left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)\right] \ , \tag{2.67}$$

όπου $\mathrm{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x dy e^{-y^2}$, είναι η συνάρτηση λάθους.

γ) Έστω ότι η θερμότητα εισρρέει απ΄ το σημείο $x = 0$. Έχουμε

$$\left.\frac{\partial T(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = -Q \ . \tag{2.68}$$

Σε αυτή την περίπτωση η συνοριακή συνθήκη σπάει την εξάρτηση μόνο απ΄ τη μεταβλητή η. Η περίπτωση $Q = 0$, δηλαδή όταν το άκρο είναι μονωμένο, δεν σπάει τη συνοριακή συνθήκη, αλλά εκτός αν υπάρχει μια μη τετριμένη αρχική κατανομή θερμοκρασίας, δεν αλλάζει τίποτα σε αυτή. Αν η αρχική θερμοκρασία είναι της μορφής $T(0,x) = f(x)$, τότε δεν μπορούμε να περιμένουμε λύση που να εξαρτάται αποκλειστικά απ΄ το συνδυασμό (2.61).

Ανάλογα σχόλια ισχύουν επίσης και όταν έχουμε πεπερασμένη ράβδο με συνοριακή συνθήκη, έστω για $x = a$.

2.9 Άσκηση

Θεωρήστε μια κλειστή αλυσίδα χημικών αντιδράσεων με n διαφορετικά στοιχεία. Αν $N_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι οι πληθυσμοί των, η χρονική τους εξάρτηση διέπεται απ' το σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= \lambda_n N_n - \lambda_1 N_1 \ , \\ \frac{dN_2}{dt} &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \ , \\ &\vdots \\ \frac{dN_n}{dt} &= \lambda_{n-1} N_{n-1} - \lambda_n N_n \ , \end{aligned} \tag{2.69}$$

όπου λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ οι σταθερές μετάβασης, οι οποίες εν γένει είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Ως αρχική συνθήκη θεωρούμε μόνο ένα στοιχείο, δηλαδή ισχύει ότι

$$N_1(0) = N \ , \qquad N_2(0) = \cdots = N_n(0) = 0 \ . \tag{2.70}$$

α) Επιλύστε το σύστημα (2.69) με χρήση του μετασχηματισμού Laplace των πληθυσμών $\mathcal{L}(N_i) = F_i(s)$.

β) Βρείτε τη συμπεριφορά των $F_i(s)$ για μικρές και μεγάλες τιμές του s και από αυτή τη συμπεριφορά των πληθυσμών $N_i(t)$ για μεγάλους και μικρούς χρόνους.

γ) Θεωρείστε την περίπτωση $\lambda_i = \lambda$, $\forall i$. Υπολογίστε τους πληθυσμούς για $n = 2, 3, 4$. Σχεδιάστε τους για την περίπτωση με $n = 4$.

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρώ καταρχήν ότι

$$\sum_{i=1}^{n} N_i(t) = N \ . \tag{2.71}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace για την παράγωγο συνάρτησης, παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} (s + \lambda_1)F_1 &= \lambda_n F_n + N \ , \\ (s + \lambda_2)F_2 &= \lambda_1 F_1 \ , \\ &\vdots \\ (s + \lambda_n)F_1 &= \lambda_{n-1} F_{n-1} \ . \end{aligned} \tag{2.72}$$

Για να λύσουμε το σύστημα ορίζουμε

$$\Lambda_i = \prod_{j=1}^{i} \lambda_j \ , \qquad \Pi_i(s) = \prod_{j=i}^{n} (s+\lambda_j) \ , \tag{2.73}$$

με τη συνθήκη ότι $\Lambda_0 = \Pi_{n+1} = 1$. Κατόπιν, θεωρούμε μια απ΄ τις παραπάνω εξισώσεις (2.72) (πλήν της 1ης) που είναι της μορφής

$$(s+\lambda_{i+1})F_{i+1} = \lambda_i F_i \ . \tag{2.74}$$

Αυτή επιλύεται απ΄ την έκφραση

$$F_i(s) = A(s)\Lambda_{i-1}\Pi_{i+1}(s) \ , \tag{2.75}$$

όπου η συνάρτηση $A(s)$ υπολογίζεται αντικαθιστώντας στην 1η εκ των (2.72). Η σχετική λύση είναι

$$A(s) = \frac{N}{\Pi_1(s) - \Lambda_n} \ . \tag{2.76}$$

Άρα

$$F_i(s) = N\frac{\Lambda_{i-1}\Pi_{i+1}(s)}{\Pi_1(s) - \Lambda_n} \ , \qquad i = 1, 2, \dots, n \ . \tag{2.77}$$

β) Για μικρές τιμές του s έχουμε ότι $\Lambda_{i-1}\Pi_{i+1}(0) = \Lambda_1/\lambda_i$ και

$$\Pi_1(s) = \Lambda_1 \left(1 + s\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j}\right) + \mathcal{O}(s^2) \ , \tag{2.78}$$

οπότε

$$F_i(s) = \frac{N}{\lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j}} \ \frac{1}{s} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^2}\right) \ . \tag{2.79}$$

Απ΄ τη θεωρία το όριο αυτό αντιστοιχεί σε στο όριο $t \to \infty$. Άρα

$$N_i(\infty) = \frac{N}{\lambda_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j}} \ . \tag{2.80}$$

Το αποτέλεσμα αυτό θα μπορούσαμε το πάρουμε και επιλύοντας το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει απ΄ τις (2.69) θέτοντας τις χρονικές παραγώγους στο μηδέν.

Για μεγάλες τιμές του s έχουμε ότι $\Pi_i(s) \simeq s^{n-i+1}$, οπότε

$$F_i(s) \simeq N\frac{\Lambda_{i-1}}{s^i} \ . \tag{2.81}$$

Απ΄ τη θεωρία το όριο αυτό αντιστοιχεί στο όριο $t \to 0$, οπότε

$$N_i(t) \simeq N\frac{\Lambda_{i-1}}{(i-1)!} \ t^{i-1} \ . \tag{2.82}$$

γ) Για ίδιες σταθερές $\lambda_i = \lambda$, έχουμε ότι

$$F_i(s) = N\frac{\lambda^{i-1}(\lambda+s)^{n-i}}{(\lambda+s)^n - \lambda^n} \ . \tag{2.83}$$

Απ΄ τη σχέση αυτή αντιστρέφοντας το μετασχηματικό Laplace βρίσκουμε τα $N_i(t)$. Έχουμε για $n = 2$

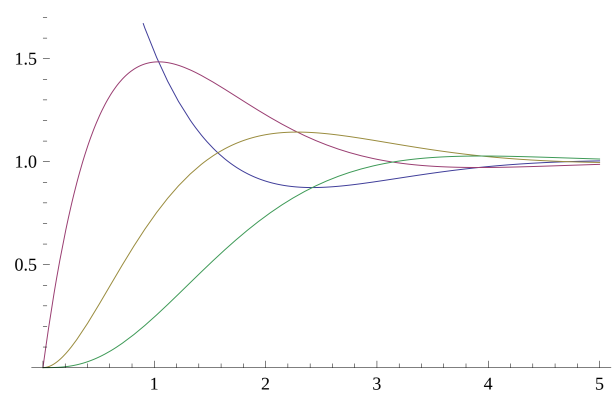
$$N_1(t) = \frac{N}{2}\left(1 + e^{-2\lambda t}\right) \ , \qquad N_2(t) = \frac{N}{2}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right) \ , \tag{2.84}$$

για $n = 3$

$$\begin{aligned} N_1(t) &= \frac{N}{3}\left(1 + 2e^{-3\lambda t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right) \ , \\ N_2(t) &= \frac{N}{3}\left[1 + e^{-3\lambda t/2}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right] \ , \\ N_3(t) &= \frac{N}{3}\left[1 - e^{-3\lambda t/2}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t + \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right] \end{aligned} \tag{2.85}$$

και για $n = 4$

$$\begin{aligned} N_1(t) &= \frac{N}{2}e^{-\lambda t}\left(\cosh\lambda t + \cos\lambda t\right) \ , \qquad N_2(t) = \frac{N}{2}e^{-\lambda t}\left(\sinh\lambda t + \sin\lambda t\right) \ , \\ N_3(t) &= \frac{N}{2}e^{-\lambda t}\left(\cosh\lambda t - \cos\lambda t\right) \ , \qquad N_4(t) = \frac{N}{2}e^{-\lambda t}\left(\sinh\lambda t - \sin\lambda t\right) \ , \end{aligned} \tag{2.86}$$



Σχήμα 1: Γραφική παράσταση των πληθυσμών απ΄ την (2.86) κανονικοποιημένων έτσι ώστε $N = 4$ και με τη σταθερά $\lambda = 1$. Οι γραμμές από πάνω προς τα κάτω, πριν αυτές αρχίζουν να διασταυρώνονται, αντιστοιχούν σε $i = 1, 2, 3, 4$.