ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Άσκηση 1

Έστω f αναλυτική συνάρτηση στο χωρίο $\{z : |z| > 1\}$ και ισχύει: $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Δείξτε ότι για $|z| > 2$ ισχύει:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = -f(z)$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\, dx$$

Άσκηση 3

Δείξτε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό a ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{it} + a|\, dt = \begin{cases} \log|a| & \text{if } |a| > 1 \\ 0 & \text{if } |a| \le 1 \end{cases}$$

Άσκηση 4

Έστω $0 < a < 1$ δείξτε ότι:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}\, dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

χρησιμοποιώντας κατάλληλη διαδρομή ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο $z = x + iy$.

Άσκηση 5

Έστω $a > 0$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\Re z=0} \frac{a^z}{z^2-1}\, dz$$

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \; dx$$

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\sigma-i}^{\sigma+i} \frac{zt^z}{z^2+1} \; dz$$

όπου $\sigma > 0$ και $0 < t < 1$.

Άσκηση 8

Έστω $a \in \mathbf{C}$ με $|a| < 1$ και $n \in \mathbf{N}$. Δείξτε ότι η εξίσωση: $(z-1)^n e^z = a$ έχει ακριβώς n λύσεις στο ημιεπίπεδο $\Re z > 0$.

Άσκηση 9

Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση και την κατάλληλη κλειστή διαδρομή στο z-επίπεδο δείξτε ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5} \; dx = \frac{-\pi \sin 2}{e}$$

Άσκηση 10

Χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση και την κατάλληλη κλειστή διαδρομή στο z-επίπεδο δείξτε ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\log x)^2}{1+x^2} \; dx = \frac{\pi^3}{8}$$

Άσκηση 11

Να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$$

με $a \in \mathcal{R}$, χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση και την κατάλληλη κλειστή διαδρομή στο z-επίπεδο.

Άσκηση 12

Να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$$

με $a \in \mathcal{R}$, χρησιμοποιώντας μιγαδική ολοκλήρωση και την κατάλληλη κλειστή διαδρομή στο z-επίπεδο. Ακολουθείστε την διαδικασία που συζητήσαμε στο μάθημα αντικαθιστώντας την συνάρτηση ¨οδηγό' $\cot \pi z$ με την συνάρτηση $\csc \pi z = \frac{1}{\sin \pi z}$.

Άσκηση 13

Δείξτε ότι:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K(0,1)} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\, dz$$

όπου $K(0,1)$ είναι κύκλος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1 διαγραφόμενος αριστερόστροφα. Χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα υπολογίστε το άθροισμα:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$$

Άσκηση 14

Σύμφωνα με τις σχέσεις Kramers-Kronig το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της διηλεκτρικής σταθεράς ϵ ενός υλικού συναρτήσει της συχνότητας διέγερσης του ω, συνδέονται ως:

$$\mathrm{Re}\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty d\Omega \, \frac{\Omega \; \mathrm{Im}\epsilon(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2}$$

όπου ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού. Αν το φανταστικό μέρος δίνεται από την σχέση:

$$\mathrm{Im}\epsilon(\omega) = \lambda\epsilon_0 \left(\theta(\omega - \omega_1) - \theta(\omega - \omega_2)\right) \qquad \omega_2 > \omega_1 > 0$$

να βρεθεί το πραγματικό μέρος της διηλεκτρικής σταθεράς.

Άσκηση 15

Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$H_\nu(a) = \frac{1}{i\pi}\int_C e^{(a/2)(z-1/z)} \; \frac{dz}{z^{\nu+1}}$$

Να βρεθεί προσεγγιστική έκφραση για το ολοκλήρωμα αυτό στο όριο $a \gg 1$. Η διαδρομή C είναι στην περιοχή αναλυτικότητας της συνάρτησης που ολοκληρώνεται.

Άσκηση 16

Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$B(x,y) = \int_0^1 dt \; t^{x-1}(1-t)^{y-1} \qquad , \qquad x > 0, y > 0$$

Βρείτε την προσεγγιστική τιμή του για $x \gg 1$, $y \gg 1$.

Άσκηση 17

Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C dw \; e^{z\sinh w - \nu w} \qquad , \qquad \mathrm{Re}z > 0$$

Βρείτε την προσεγγιστική τιμή του για $\nu \gg 1$. Η διαδρομή C είναι στην περιοχή αναλυτικότητας της συνάρτησης που ολοκληρώνεται.

Άσκηση 18

Βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους στο ανάπτυγμα Laurent των συναρτήσεων:

$$f_1(z) = \frac{z}{1 - \cosh z}, \quad f_2(z) = \frac{1}{e^z - 1}, \quad f_3(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$$

γύρω από το $z = 0$ και κατόπιν υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\oint_{K(\epsilon, 0)} f_i(z)\, dz, \quad i = 1,\ 2,\ 3$$

Άσκηση 19

Βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης:

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 4)}$$

γύρω από το $z = 0$, για $2 < |z|$.

Άσκηση 20

Βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης:

$$f(z) = \frac{z + 1}{z^3 + 5z^2 + 7z + 3}$$

γύρω από το $z = -1$, για $|z + 1| < 2$.