Τρόποι Κατασκευής

- Εάν οι ιδιοσυναρτήσεις του διαφορικού τελεστή L

$$L_{\underline{x}}\varphi_{\underline{n}}(\underline{x}) = \lambda_n \varphi_{\underline{n}}(\underline{x}) \tag{17}$$

αποτελούν ένα ορθοκανονικό

$$\int_V d\underline{x}\varphi_{\underline{n}}(\underline{x})\varphi^*_{\underline{m}}(\underline{x}) = \delta_{\underline{n},\underline{m}} \tag{18}$$

και πλήρες σύστημα συναρτήσεων

$$\sum_{\underline{n}} \varphi_{\underline{n}}(\underline{x})\varphi^*_{\underline{n}}(\underline{x}') = \delta(\underline{x}-\underline{x}') \tag{19}$$

και εάν

$$\lambda_n \neq z \quad \forall\ n \tag{20}$$

τότε η εξίσωση Green

$$(L_{\underline{x}} - z)G(\underline{x},\underline{x}';z) = -\delta(\underline{x}-\underline{x}') \tag{21}$$

(όπου z αυθαίρετη , εν γένει μιγαδική, σταθερά) μπορεί να λυθεί αμέσως :

$$G(\underline{x},\underline{x}';z) = \sum_{\underline{n}} \frac{\varphi_{\underline{n}}(\underline{x})\varphi^*_{\underline{n}}(\underline{x}')}{z-\lambda_n} \tag{22}$$

Η τελευταία έκφραση μπορεί είτε να παραχθεί άμεσα με τη βοήθεια των σχέσεων (17) και (19) είτε , έμμεσα, να ελεγχθεί ότι επαληθεύει την εξ. (21). Σε κάθε περίπτωση και αφού προφανώς, λόγω της σχ. (20) , η συνάρτηση Green (22) υπάρχει ,είναι και η μοναδική λύση της εξ. (21).

Ορισμένες παρατηρήσεις είναι απαραίτητες:

(α) Είναι προφανές ότι οι ιδιοσυναρτήσεις (17) θα πρέπει να προσδιορισθούν έτσι ώστε να ικανοποιούν τις δεδομένες ομογενείς συνοριακές συνθήκες του προβλήματος που μας απασχολεί.

(β) Από την έκφραση (22) και την απαίτηση (20) βλέπουμε ότι η συνάρτηση Green υπάρχει αρκεί η ομογενής εξίσωση

$$(L_{\underline{x}} - z)\varphi(\underline{x}) = 0$$

να μην έχει λύση η οποία να ικανοποιεί τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες του προβλήματός μας .

(γ) Η συνάρτηση Green , ως συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z έχει πόλους πρώτης τάξης στις θέσεις $z=\lambda_n$ με αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα τους συνδυασμούς $\varphi_{\underline{n}}(\underline{x})\varphi^*_{\underline{n}}(\underline{x}')$. Προκύπτει έτσι το συμπέρασμα ότι το φάσμα του διαφορικού τελεστή μπορεί να οδηγήσει στον προσδιορισμό της συνάρτησης Green αλλά και αντίστροφα : Η γνώση των αναλυτικών ιδιοτήτων της συνάρτησης Green μπορεί να μας οδηγήσει στο φάσμα του διαφορικού τελεστή.

• Εάν το φάσμα του διαφορικού τελεστή είναι συνεχές οι προηγούμενες σχέσεις πρέπει να τροποποιηθούν κατάλληλα. Έτσι η σχέση ορθοκανονικότητας θα πάρει τη μορφή

$$\int_V d\underline{x}\varphi_{\underline{p}}(\underline{x})\varphi^*_{\underline{q}}(\underline{x})=\delta(\underline{p}-\underline{q}) \tag{23}$$

και η σχέση πληρότητας θα διαβάζεται :

$$\int_{V_p} d\underline{p}\varphi_{\underline{p}}(\underline{x})\varphi^*_{\underline{p}}(\underline{x}')=\delta(\underline{x}-\underline{x}') \tag{24}$$

Η συνάρτηση Green μπορεί να προσδιορισθεί όπως και στην διακριτή περίπτωση :

$$G(\underline{x},\underline{x}';z)=\int_{V_p} d\underline{p}\,\frac{\varphi_{\underline{p}}(\underline{x})\varphi^*_{\underline{p}}(\underline{x}')}{z-\lambda_p} \tag{25}$$

Ὅπως φαίνεται από την τελευταία σχέση η συνάρτηση Green υπάρχει αν $\lambda_p \neq z \ \ \forall\, p$.

• **Ειδικά σε μία διάσταση, σε προβλήματα δηλαδή με συνήθεις παραγώγους**, η συνάρτηση Green κατασκευάζεται με την παρακάτω τεχνική.

Ας θεωρήσουμε την πιο γενική μορφή ενός διαφορικού τελεστή δεύτερης τάξης με συνήθεις παραγώγους :

$$L_x=a_2(x)\frac{d^2}{dx^2}+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x) \tag{26}$$

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$L_xG(x,x')=-\delta(x-x') \tag{27}$$

με κάποιες ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$b[G(x_1,x')]=b[G(x_2,x')]=0 \tag{28}$$

(στην τελευταία σχέση ο συμβολισμός έχει γενικευθεί ώστε να συμπεριλαμβάνει συνοριακές συνθήκες διαφορετικών τύπων).

Από την εξ. (27) προκύπτει αμέσως ότι :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} dxL_x G(x,x') = a_2(x')\left[\frac{d}{dx}G(x,x')\bigg|_{x=x'+0} - \frac{d}{dx}G(x,x')\bigg|_{x=x'-0}\right]+$$

$$+a_1(x')\left[G(x'+0,x')-G(x'-0,x')\right]+a_0(x')\int_{x'-0}^{x'+0} dxG(x,x') = -1 \qquad (29)$$

(Στην τελευταία υποθέσαμε ,για λόγους απλότητας ,ότι οι συντελεστές του διαφορικού τελεστή είναι συνεχείς συναρτήσεις.)

Η μοναδική λύση της εξ. (29) είναι :

$$G(x'+0,x') = G(x'-0,x') \qquad (30)$$

και

$$\frac{d}{dx}G(x,x')\bigg|_{x=x'+0} - \frac{d}{dx}G(x,x')\bigg|_{x=x'-0} = -\frac{1}{a_2(x')} \qquad (31)$$

Μπορούμε τώρα να δούμε ότι οι δύο εξισώσεις (30) και (31) μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (28) είναι αρκετές για την εύρεση της συνάρτησης Green.
Θα ξεκινήσουμε με την παρατήρηση ότι η εξίσωση (27) είναι ομογενής όταν $x \neq x'$ και θα γράψουμε για τη λύση της :

$$\begin{aligned} x_1 \le x < x' \quad &: \quad \mathrm{G}_<(x,x') = \mathrm{A}(x')\phi_1(x) + \mathrm{B}(x')\phi_2(x) \\ x' < x \le x_2 \quad &: \quad \mathrm{G}_>(x,x') = \Gamma(x')\phi_1(x) + \Delta(x')\phi_2(x) \end{aligned} \qquad (32)$$

όπου ϕ_1 και ϕ_2 είναι δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$L_x\phi(x) = 0 \qquad (33)$$

Από τις (30), (31) και (32) βλέπουμε αμέσως ότι

$$\begin{aligned} &[\mathrm{A}(x') - \Gamma(x')]\phi_1(x') + [\mathrm{B}(x') - \Delta(x')]\phi_2(x') = 0 \\ &[\mathrm{A}(x') - \Gamma(x')]\dot{\phi}_1(x') + [\mathrm{B}(x') - \Delta(x')]\dot{\phi}_2(x') = \frac{1}{a_2(x')} \end{aligned} \qquad (34)$$

Επειδή οι λύσεις της ομογενούς είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, η ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος (34) είναι διάφορη του μηδενός και επομένως μπορούμε να το λύσουμε και να βρούμε

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(x') - \Gamma(x') &= -a_2(x')\frac{\phi_2(x')}{\phi_1(x')\dot{\phi}_2(x') - \dot{\phi}_1(x')\phi_2(x')} \\
\mathrm{B}(x') - \Delta(x') &= a_2(x')\frac{\phi_1(x')}{\phi_1(x')\dot{\phi}_2(x') - \dot{\phi}_1(x')\phi_2(x')}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες (28) θα βρούμε

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x')b[\phi_1(x_1)] + \Delta(x')b[\phi_2(x_1)] = a_2(x')\frac{\phi_2(x')}{\phi_1(x')\dot{\phi}_2(x') - \dot{\phi}_1(x')\phi_2(x')}b[\phi_1(x_1)] - \\
- a_2(x')\frac{\phi_1(x')}{\phi_1(x')\dot{\phi}_2(x') - \dot{\phi}_1(x')\phi_2(x')}b[\phi_2(x_1)]
\end{aligned}
$$

$$
\Gamma(x')b[\phi_1(x_2)] + \Delta(x')b[\phi_2(x_2)] = 0 \tag{36}
$$

Το τελευταίο σύστημα μπορεί να λυθεί εάν η ορίζουσα

$$
D = \begin{vmatrix} b[\phi_1(x_1) & b[\phi_2(x_1)] \\ b[\phi_1(x_2) & b[\phi_2(x_2)] \end{vmatrix} \neq 0 \tag{37}
$$

Είναι προφανές ότι η τελευταία απαίτηση είναι ισοδύναμη με την απαίτηση το σύστημα

$$
\begin{aligned}
\lambda b[\phi_1(x_1)] + \mu b[\phi_2(x_1)] = 0 \\
\lambda b[\phi_1(x_2)] + \mu b[\phi_2(x_2)] = 0
\end{aligned}
\tag{38}
$$

να μην έχει παρά την τετριμμένη μηδενική λύση $\lambda = \mu = 0$. Αν τώρα λάβουμε υπόψη ότι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός λύσεων της ομογενούς εξίσωσης (33) είναι επίσης λύση της, προκύπτει άμεσα από την (38) ότι το σύστημα (36) έχει λύση –με άλλα λόγια η συνάρτηση Green υπάρχει-αν δεν υπάρχει μη τετριμμένη λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης η οποία να ικανοποιεί τις δεδομένες ομογενείς συνοριακές συνθήκες του προβλήματός μας.

• Μια παρατήρηση η οποία πολλές φορές μπορεί να αποδειχθεί χρήσιμη, είναι ότι αν μπορούμε να κατασκευάσουμε τη συνάρτηση Green G_0 που ικανοποιεί κάποιες δεδομένες συνοριακές συνθήκες μπορούμε –καταρχή τουλάχιστον- να κατασκευάσουμε και τη συνάρτηση Green G που υπόκειται σε οποιεσδήποτε (ομογενείς πάντα) συνοριακές συνθήκες μας ενδιαφέρουν.
Η δυνατότητα αυτή σχετίζεται άμεσα με τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$L_{\underline{x}}\Lambda(\underline{x},\underline{x}')=0$$

τέτοια ώστε ο συνδυασμός

$$G(\underline{x},\underline{x}')=G_0(\underline{x},\underline{x}')+\Lambda(\underline{x},\underline{x}') \tag{39}$$

να ικανοποιεί τις απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες.
Αν το καταφέρουμε είναι προφανές η συνάρτηση (39) είναι η ζητούμενη συνάρτηση Green.

• Θα κλείσουμε αυτό το εδάφιο που αφορά στην κατασκευή των συναρτήσεων Green με την παρατήρηση ότι **εάν είναι γνωστή η συνάρτηση Green μπορούμε να βρούμε τη λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης η οποία υπόκειται σε μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.**
Ας ξεκινήσουμε από την εξ. (5) και ας γράψουμε τη λύση της

$$\Psi_0(\underline{x})=\int_V d\underline{x}'\delta(\underline{x}-\underline{x}')\Psi_0(\underline{x}')=-\int_V d\underline{x}'\tilde{L}_{\underline{x}'}G(\underline{x},\underline{x}')\Psi_0(\underline{x}') \tag{40}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και τη σχέση (9). Αν τώρα στο τελευταίο ολοκλήρωμα κάνουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση θα προκύψουν, λόγω των μη ομογενών συνοριακών συνθηκών, μη μηδενικοί επιφανειακοί όροι :

$$\Psi_0(\underline{x})=Q_S(\underline{x})-\int_V d\underline{x}'G(\underline{x},\underline{x}')L_{\underline{x}'}\Psi_0(\underline{x}')=Q_S(\underline{x}) \tag{41}$$

Εφόσον οι επιφανειακοί όροι προσδιορίζονται μόνο από τη συνάρτηση Green και τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες είναι προφανές ότι η εξ. (41) μας δίνει τη λύση της ομογενούς που ικανοποιεί μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.