Η Κυματική Εξίσωση.

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα ασχοληθούμε με την (μη ομογενή) κυματική εξίσωση σε D χωρικές και 1 χρονική διάσταση :

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\right)\Psi(\vec{r},t)=f(\vec{r},t) \tag{139}$$

(Εδώ c είναι μια σταθερά με διαστάσεις ταχύτητας.)
Η εξίσωση αυτή, σε ό,τι αφορά στο χώρο, συνοδεύεται (συνήθως) από συνοριακές συνθήκες (εν γένει μη ομογενείς) τύπου Dirichlet ή Neumann. Σε ό,τι αφορά στο χρόνο συνήθως έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών συνθηκών (οπότε ζητάμε τη λύση για $t>t_0$) ή τελικών συνθηκών (ζητάμε τη λύση για $t<t_0$). Σε κάθε περίπτωση οι συνθήκες είναι τύπου Cauchy :

$$\Psi(\vec{r},t_0)=\psi_0(\vec{r})\neq 0\ ,\ \ \frac{\partial}{\partial t_0}\Psi(\vec{r},t_0)=\upsilon_0(\vec{r})\neq 0 \tag{140}$$

Η αντίστοιχη εξίσωση Green είναι

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\vec{\nabla}_r^{\,2}\right)G(\vec{r},t;\vec{r}',t')=\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t') \tag{141}$$

και συνοδεύεται, βέβαια, από την ομογενή έκδοση των δεδομένων συνοριακών συνθηκών. Η συνάρτηση Green που θα προκύψει παρουσιάζει το αποτέλεσμα το οποίο παράγεται στη θέση $\vec{r}$ τη χρονική στιγμή t, από ένα αίτιο το οποίο άρχισε να λειτουργεί τη χρονική στιγμή t' στη θέση $\vec{r}'$.

Μπορούμε αμέσως να δούμε ότι η εξίσωση (139) δεν αλλάζει αν κάνουμε την αλλαγή

$$\Psi(\vec{r},t)\rightarrow\tilde{\Psi}(\vec{r},t)=\Psi(\vec{r},t)+\Phi(\vec{r},t) \tag{142}$$

με

$$\Phi(\vec{r},t)=\int_{-\infty}^{\infty}dp_0C(\vec{r},p_0^2)e^{ip_0t}$$

αρκεί οι συντελεστές $C(\vec{r},p_0^2)$ να είναι τέτοιοι ώστε

$$\left(\vec{\nabla}^2+\frac{p_0^2}{c^2}\right)C=0 \tag{143}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι με τις συνοριακές συνθήκες που αναφέρθηκαν παραπάνω δεν είναι δυνατόν να βρεθούν μη μηδενικοί συντελεστές C οι οποίοι να κάνουν την αλλαγή (142) συμμετρία του προβλήματός μας.

Πράγματι . Για να μην αλλάζουν οι σχ.(140) θα πρέπει

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 C e^{ip_0 t_0} = i\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 p_0 C e^{ip_0 t_0} = 0 \Rightarrow C = 0\,.$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα μπορούμε να τα καταλάβουμε και αλλιώς.
Η συνάρτηση $\Phi(\vec{r},t)$ δεν είναι παρά η γενική λύση της ομογενούς κυματικής εξίσωσης. Ως τέτοια,λοιπόν, σέβεται τη γενική ιδιότητα του διαφορικού τελεστή :
Την αναλλοιώτητα στη χρονική αντιστροφή $t \leftrightarrow -t$.
Από την άλλη μεριά οι συνοριακές συνθήκες που αφορούν στο χρόνο θέτουν μια χρονική στιγμή ως αφετηρία ή ως τέλος : Μπορούμε να μιλάμε για λύση του προβλήματος μετά από αυτή ή πριν από αυτή και έτσι να διαχωρίσουμε το παρελθόν από το μέλλον. Επομένως η αντιστρεπτότητα στο χρόνο δεν είναι συμμετρία της λύσης μας και επομένως ούτε η αλλαγή (142).

Με άλλα λόγια, **με τις δεδομένες συνοριακές συνθήκες, η λύση στο πρόβλημά μας (υπάρχει και) είναι μοναδική και επομένως η συνάρτηση Green υπάρχει και είναι μοναδική.**

• Ένας διαφορετικός τρόπος να διατυπωθεί το παραπάνω συμπέρασμα είναι ο παρακάτω.
Ας πούμε ότι η εξ. (139) έχει δύο διαφορετικές λύσεις Ψ_1 και Ψ_2. Προφανώς η διαφορά τους $\psi = \Psi_1 - \Psi_2$ θα ικανοποιεί την ομογενή κυματική εξίσωση και την ομογενή έκδοση των συνοριακών συνθηκών.
Θεωρούμε τώρα την έκφραση

$$H(t) = \int_V d^D r \left[\frac{1}{c^2}(\frac{\partial \psi}{\partial t})^2 + (\vec{\nabla}\psi)^2 \right] \tag{144}$$

Μπορούμε αμέσως να δούμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(t) &= 2\int_V d^D r \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + (\vec{\nabla}\psi)\cdot\vec{\nabla}(\frac{\partial \psi}{\partial t}) \right] = \\ &= 2\int_V d^D r \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \vec{\nabla}[(\vec{\nabla}\psi)(\frac{\partial \psi}{\partial t})] - (\vec{\nabla}^2\psi)\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = \\ &= 2\int_{S(V)} dS[\partial_n \psi(\vec{r}_S)]\psi(\vec{r}_S) = 0\end{aligned}$$

και επομένως

$$H(t) = H(t_0) = 0 \tag{145}$$

Για να ικανοποιείται η (145) θα πρέπει (σχεδόν παντού) να ισχύει ότι $\psi =$ σταθερά.
Αφού για $t = t_0$ η ψ μηδενίζεται , η σταθερά αυτή πρέπει να είναι 0.

• Πριν προχωρήσουμε είναι χρήσιμο να σταθούμε για λίγο στο χρονικό κομμάτι του προβλήματος. Ας παρατηρήσουμε καταρχή ότι τόσο η εξίσωση Green όσο και οι συνοριακές συνθήκες είναι αναλλοίωτες στις χρονικές μεταθέσεις $t \to t + a$. Περιμένουμε επομένως ότι η συνάρτηση Green που θα προκύψει από τη λύση της εξ. (141) θα εξαρτάται από τη χρονική απόσταση $\tau = t - t'$:

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = G(\vec{r}, \vec{r}'; t - t') \tag{146}$$

και θα πρέπει, βέβαια, να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$G(\vec{r}, \vec{r}'; t_0 - t') = \frac{\partial}{\partial t_0} G(\vec{r}, \vec{r}'; t_0 - t') = 0 \tag{147}$$

Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στους παρακάτω ορισμούς :

Θα ονομάζουμε **Retarded** τη συνάρτηση Green η οποία είναι τέτοια ώστε

$$G_R(\vec{r}, \vec{r}'; t - t') = \frac{\partial}{\partial t} G_R(\vec{r}, \vec{r}'; t - t') = 0 \text{ όταν } t - t' < 0 \tag{148}$$

Η συνάρτηση αυτή, όπως δείχνει και η σχ. (147), χρησιμοποιείται όταν μας απασχολεί ένα πρόβλημα αρχικών συνθηκών όταν, δηλαδή, ενδιαφερόμαστε για τη λύση του προβλήματος σε χρόνους $t > t_0$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται και **αιτιακή** διότι το αποτέλεσμα το οποίο παράγεται τη χρονική στιγμή t προέρχεται από αίτιο το οποίο ενεργοποιήθηκε σε προγενέστερη χρονική στιγμή.

Είναι συνηθισμένη και χρήσιμη η εισαγωγή του **διαδότη** :

$$G_R(\vec{r}, \vec{r}'; t - t') = \theta(t - t') K(\vec{r}, \vec{r}'; t - t') \tag{149}$$

Αν αντικαταστήσουμε την προηγούμενη έκφραση στην εξίσωση Green (141) μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο διαδότης ικανοποιεί την ομογενή κυματική εξίσωση

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \vec{\nabla}_r^{\,2}\right) K(\vec{r}, \vec{r}'; t - t') = 0 \tag{150}$$

και σε ό,τι αφορά στο χρόνο ικανοποιεί τις συνθήκες

$$K(\vec{r}, \vec{r}'; 0) = 0 \quad \text{και} \quad \left.\frac{\partial}{\partial t} K(\vec{r}, \vec{r}'; t - t')\right|_{t=t'} = c^2 \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{151}$$

(Σε ό,τι αφορά το χώρο, τόσο ο διαδότης όσο και η συνάρτηση Green ικανοποιούν, βέβαια, την ομογενή έκδοση των χωρικών συνοριακών συνθηκών του προβλήματός μας.)

Θα ονομάζουμε **Advanced** τη συνάρτηση Green η οποία είναι τέτοια ώστε

$$G_A(\vec{r},\vec{r}';t-t') = \frac{\partial}{\partial t}G_A(\vec{r},\vec{r}';t-t') = 0 \quad \text{όταν} \quad t-t'>0 \tag{152}$$

Όπως είναι προφανές η Advanced συνάρτηση Green μπορεί να προκύψει από την Retarded αν κάνουμε την ανταλλαγή $t \leftrightarrow t'$:

$$G_A(\vec{r},\vec{r}';t-t') = G_R(\vec{r},\vec{r}';t'-t)$$

$$= \theta(t'-t)K(\vec{r},\vec{r}';t'-t) = -\theta(t'-t)K(\vec{r},\vec{r}';t-t') \tag{153}$$

Στην τελευταία σχέση παρατηρήσαμε ότι ο διαδότης είναι περιττή συνάρτηση της χρονικής απόστασης, γεγονός που υποδηλώνεται στις σχέσεις (151).

Δεν είναι δύσκολο να βρεθεί ο διαδότης αν χρησιμοποιήσουμε την εξ. (150) μαζί με τις δεσμεύσεις (151). Εντούτοις, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα ακολουθήσουμε ένα διαφορετικό δρόμο.

Θα ξεκινήσουμε αφήνοντας κατά μέρος τις συνοριακές απαιτήσεις (148) ή (152). Ο χρόνος τώρα κινείται χωρίς περιορισμούς και αφετηρία μας είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης Green ως προς το χρόνο:

$$G(\vec{r},\vec{r}';\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_0\tau} g(\vec{r},\vec{r}';p_0) \quad , \; \tau = t-t' \tag{154}$$

(Τοποθετημένη αλλιώς η προηγούμενη σχέση δηλώνει την ανάπτυξη της συνάρτησης Green στη βάση που συγκροτούν οι ιδιοσυναρτήσεις του χρονικού τελεστή

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(t) = \lambda\varphi(t) \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ip_0 t} \quad , \; \lambda = -\frac{p_0^2}{c^2} \;)$$

Αν αντικαταστήσουμε την έκφραση (154) στην εξίσωση Green (141) θα πάρουμε :

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \vec{\nabla}_r^{\,2}\right)G(\vec{r},\vec{r}';\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_0\tau}\left(-\frac{p_0^2}{c^2} - \vec{\nabla}_r^{\,2}\right)g(\vec{r},\vec{r}';p_0) =$$

$$= \delta(\vec{r}-\vec{r}')\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} e^{ip_0\tau}$$

και επομένως η συνάρτηση g πρέπει να είναι λύση της εξίσωσης

$$\left(\frac{p_0^2}{c^2} + \vec{\nabla}_r^{\,2}\right)g(\vec{r},\vec{r}';p_0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{155}$$

η οποία δεν είναι παρά η εξίσωση Green που αντιστοιχεί στην εξίσωση Helmholtz.

Όπως είναι προφανές από τη συζήτηση του προηγουμένου κεφαλαίου ο διαφορικός τελεστής στην τελευταία εξίσωση έχει πάντα μηδενικές ιδιοτιμές (ακόμα και αν ο χώρος μας είναι πεπερασμένος) αφού η παράμετρος p_0 ολοκληρώνεται ελεύθερα. Επομένως η λύση της εξ. (155) πρέπει να βρεθεί μέσω μιας οριακής διαδικασίας με τη οποία να διαχειριστούμε το πρόβλημα των μηδενικών ιδιοτιμών. (Ο λόγος που εμφανίζονται μηδενικές ιδιοτιμές έχει να κάνει, βέβαια, με το ότι έχουμε αφήσει απεριόριστο το χρόνο και επομένως η αλλαγή (142) δεν προσκρούει σε συνοριακές απαιτήσεις ή, με άλλα λόγια, η αλλαγή (142) έχει γίνει συμμετρία του προβλήματός μας.)

Είναι αναμενόμενο (και εξάλλου έχει πιστοποιηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο) ότι διαφορετικές οριακές διαδικασίες οδηγούν σε διαφορετικά αποτελέσματα .
Αν, επομένως, επιμένουμε στις συνοριακές συνθήκες (ας πούμε στις (148) ή (152)) θα πρέπει να διαλέξουμε και τον αντίστοιχο τρόπο ορισμού της λύσης της εξ.(155). Από μαθηματική σκοπιά οποιοσδήποτε τρόπος διαχείρισης των μηδενικών ιδιοτιμών είναι ευπρόσδεκτος. Το κόστος στην περίπτωση αυτή είναι ότι θα πρέπει να βρούμε την κατάλληλη λύση της ομογενούς η οποία προστιθέμενη στην λύση που ήδη βρήκαμε να δίνει τη συνάρτηση Green που μας ενδιαφέρει.

Μετά από τις διευκρινήσεις αυτές μπορούμε να συνεχίσουμε με την κατασκευή της συνάρτησης $g(\vec{r},\vec{r}';p_0)$. Για να προχωρήσουμε θα πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα

$$\vec{\nabla}^2\varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \lambda_p\varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) \qquad (156)$$

είτε σε ένα πεπερασμένο τμήμα του χώρου και με τις δεδομένες (Dirichlet ή Neumann) ομογενείς συνοριακές συνθήκες, είτε σε απεριόριστο χώρο οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα επίπεδα κύματα

$$\varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \qquad (157)$$

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο θα συζητήσουμε μόνο τη δεύτερη περίπτωση. Μέσω των επιπέδων κυμάτων (157) η συνάρτηση g βρίσκεται εύκολα:

$$g_0(\vec{r},\vec{r}';p_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{\exp[-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')]}{\vec{p}^2-\frac{p_0^2}{c^2}} \qquad (158)$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (154) θα έχουμε :

$$G_0(\vec{r},\vec{r}';\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\frac{\exp[ip_0\tau-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')]}{\vec{p}^2-\frac{p_0^2}{c^2}} \qquad (159)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό βέβαια δεν υπάρχει αφού πάντα θα έχουμε μηδενισμό του παρονομαστή. Ένας τρόπος να ξεπεράσουμε το πρόβλημα είναι να περάσουμε στη γενικευμένη συνάρτηση Green :

$$\tilde{G}_0(\vec{r},\vec{r}';\tau) = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int\frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{\exp[ip_0\tau - i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')]}{\vec{p}^2 - \frac{p_0^2}{c^2}} \tag{160}$$

Ένας διαφορετικός- και όπως θα δούμε με ιδιαίτερο ενδιαφέρον- τρόπος να διαχειριστούμε το πρόβλημα είναι να ορίσουμε τις συναρτήσεις

$$G_0^{\pm}(\vec{r},\vec{r}';\tau) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int\frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{\exp[ip_0\tau - i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')]}{\vec{p}^2 - (\frac{p_0}{c}\pm i\varepsilon)^2} \tag{161}$$

Μπορεί εύκολα να διαπιστώσει κανείς ότι τόσο η συνάρτηση (160) όσο και οι συναρτήσεις (161) ικανοποιούν την εξίσωση Green (141). Η πρώτη είναι γενικευμένη με την έννοια ότι δίνει μηδενικό αποτέλεσμα αν ολοκληρωθεί με κάποιο από τα επίπεδα κύματα (157) για το οποίο $\vec{p}^2 = \frac{p_0^2}{c^2}$.

Οι συναρτήσεις (161) μπορούν να προκύψουν από την (160) με την πρόσθεση της κατάλληλης λύσης της ομογενούς και, όπως θα δούμε, αντιστοιχούν στις Advanced και Retarded συναρτήσεις Green : Η ομαλοποίηση που φαίνεται στον ορισμό (161) είναι ακριβώς αυτή που χρειάζεται προκειμένου να ικανοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες (148) ή (152). Αυτό θα μπορούσε να το δεί κανείς και με το εξής ποιοτικό επιχείρημα: Ας πούμε ότι αντί για την κυματική εξίσωση (141) είχαμε την εξίσωση

$$(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + 2\gamma\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla}^2)\Psi(\vec{r},t) = f(\vec{r},t) \tag{163}$$

στην οποία υπάρχει και ένας όρος τριβής με συντελεστή $\gamma = \frac{\varepsilon}{c} \to 0$.

Αν επαναλαμβάναμε τους υπολογισμούς δεν θα αντιμετωπίζαμε πρόβλημα μηδενικών ιδιοτιμών και θα βρίσκαμε για τη συνάρτηση Green το αποτέλεσμα

$$G_0(\vec{r},\vec{r}';\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\int\frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{\exp[ip_0\tau - i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')]}{\vec{p}^2 - \frac{p_0^2}{c^2} + i\varepsilon}$$

το οποίο δεν είναι παρά η συνάρτηση G_0^- της σχέσης (161) (αν παραλείψουμε όρους $\sim\varepsilon^2$). Βλέπουμε, δηλαδή, ότι η ομαλοποίηση (161) μιμείται την ύπαρξη τριβής. Επομένως οδηγεί σε αποτελέσματα όπως και η τριβή : Η χρονική εξέλιξη δεν είναι πια αντιστρεπτή.

Για τον τελικό υπολογισμό θα ξεκινήσουμε από τα ολοκληρώματα

$$\mathrm{I}^{\pm}(p,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\frac{e^{ip_0\tau}}{\vec{p}^2 - (\frac{p_0}{c}\pm i\varepsilon)^2} = -c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{e^{i\omega c\tau}}{(\omega + p \pm i\varepsilon)(\omega - p \pm i\varepsilon)} \tag{164}$$

όπου γράψαμε $p_0 = \omega c$ και $|\vec{p}| = p$.
Τα τελευταία ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν εύκολα αν περάσουμε στο μιγαδικό επίπεδο :

$$\mathrm{I}^{\pm}(p,\tau) = \mp \frac{c}{p}\sin(pc\tau)\theta(\mp\tau) \tag{165}$$

Μετά την (165) είναι φανερό ότι η συνάρτηση G_0^- είναι η Retarded συνάρτηση Green

$$G_{0,R}(\vec{r},\vec{r}';t-t') = \theta(t-t')c\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\exp[-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')]\frac{\sin[pc(t-t')]}{p} \tag{166}$$

και η συνάρτηση G_0^+ είναι η Advanced συνάρτηση Green :

$$G_{0,A}(\vec{r},\vec{r}';t-t') = -\theta(t'-t)c\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\exp[-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')]\frac{\sin[pc(t-t')]}{p} \tag{167}$$

Αν συγκρίνουμε τις προηγούμενες σχέσεις με τις (149) και (153) βλέπουμε ότι ο διαδότης, στον απεριόριστο χώρο, δίνεται από τη σχέση

$$K_0(\vec{r},\vec{r}';t-t') = c\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\exp[-i\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')]\frac{\sin[pc(t-t')]}{p} \tag{168}$$

και μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ικανοποιεί τις σχέσεις (150) και (151).
Η γενικευμένη συνάρτηση Green μπορεί να υπολογιστεί αμέσως αν χρησιμοποιήσουμε την

$$\tilde{G}_0 = \frac{1}{2}(G_0^- + G_0^+) = \frac{1}{2}[\theta(t-t') - \theta(t'-t)]K_0 = \frac{1}{2}sign(t-t')K_0 \tag{169}$$

Επομένως οι διάφορες συναρτήσεις διαφέρουν μεταξύ τους μόνο κατά μία λύση της ομογενούς :

$$G_{0,R} = \tilde{G}_0 + \frac{1}{2}K_0 \quad , \quad G_{0,A} = \tilde{G}_0 - \frac{1}{2}K_0 \tag{170}$$

Για το τελικό αποτέλεσμα χρειαζόμαστε και τον υπολογισμό του διαδότη ο οποίος εξαρτάται από τον αριθμό των χωρικών διαστάσεων.

• Σε **τρεις χωρικές διαστάσεις** θα έχουμε

$$K_0(\vec{r},\vec{r}';t-t') = \frac{c}{4\pi^2}\int_0^{\infty} dpp\sin(pc\tau)\int_0^{\pi} d\theta\sin\theta\exp(-ipR\cos\theta) =$$

$$= \frac{c}{2\pi^2 R}\int_0^{\infty} dp\sin(pc\tau)\sin(pR) \qquad (171)$$

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο (εξ. (80)) έτσι και εδώ μεταγράψαμε την ολοκλήρωση σε σφαιρικές συντεταγμένες, χρησιμοποιήσαμε τη συντομογραφία $R \equiv |\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}'|$ ενώ θεωρήσαμε το διάνυσμα $\vec{R}$ στην κατεύθυνση του άξονα z.