• Σε **τρεις χωρικές διαστάσεις** θα έχουμε

$$K_0(\vec{r},\vec{r}';t-t') = \frac{c}{4\pi^2}\int_0^\infty dpp\sin(pc\tau)\int_0^\pi d\theta\sin\theta\exp(-ipR\cos\theta) =$$

$$= \frac{c}{2\pi^2 R}\int_0^\infty dp\sin(pc\tau)\sin(pR) \qquad (171)$$

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο (εξ. (80)) έτσι και εδώ μεταγράψαμε την ολοκλήρωση σε σφαιρικές συντεταγμένες, χρησιμοποιήσαμε τη συντομογραφία $R \equiv |\vec{R}| = |\vec{r}-\vec{r}'|$ ενώ θεωρήσαμε το διάνυσμα $\vec{R}$ στην κατεύθυνση του άξονα z.

Για τη συνέχεια του λογαριασμού θα γράψουμε

$$K_0(\vec{r},\vec{r}';t-t') = \frac{c}{8\pi^2 R}\int_{-\infty}^{\infty} dp\left[\cos[p(c\tau-R)]-\cos[p(c\tau+R)]\right] =$$

$$= \frac{c}{8\pi^2 R}\int_{-\infty}^{\infty} dp\left[e^{ip(c\tau-R)}+e^{ip(c\tau+R)}\right] = \frac{c}{4\pi R}\left[\delta(c\tau-R)-\delta(c\tau+R)\right] \qquad (172)$$

Έτσι οι συναρτήσεις Green παίρνουν την τελική τους μορφή :

$$G_{0,R}(\vec{r},\vec{r}';t-t') = \frac{c}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left[c(t-t')-|\vec{r}-\vec{r}'|\right]\theta(t-t') \qquad (173)$$

$$G_{0,A}(\vec{r},\vec{r}';t-t') = \frac{c}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left[c(t-t')+|\vec{r}-\vec{r}'|\right]\theta(t'-t) \qquad (174)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$ και $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ οι προηγούμενες σχέσεις μπορούν να ξαναγραφούν :

$$G_{0,R}(\vec{r},\vec{r}';t-t') = \frac{c}{2\pi\left[|\vec{r}-\vec{r}'|+c(t-t')\right]}\delta\left[c(t-t')-|\vec{r}-\vec{r}'|\right]\theta(t-t') =$$

$$= \frac{c}{2\pi}\delta\left[c^2(t-t')^2-(\vec{r}-\vec{r}')^2\right]\theta(t-t') \qquad (175)$$

$$G_{0,A}(\vec{r},\vec{r}';t-t') = \frac{c}{2\pi}\delta\left[c^2(t-t')^2-(\vec{r}-\vec{r}')^2\right]\theta(t'-t) \qquad (176)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις λένε ότι το αποτέλεσμα μπορεί να εντοπισθεί στη θέση $\vec{r}$ τη χρονική στιγμή t μόνο αν η απόστασή του από το σημείο $\vec{r}'$ στο οποίο εκδηλώθηκε το αίτιο τη στιγμή t', είναι ίση με την απόσταση που θα διανύσει το κύμα που κινείται με ταχύτητα c: $c^2(t-t')^2 = (\vec{r}-\vec{r}')^2$

Με τη χρήση των συναρτήσεων που βρήκαμε η λύση της κυματικής εξίσωσης μπορεί να γραφεί :

$$\Psi_{R(A)}(\vec{r},t) = \Psi_{0,R(A)}(\vec{r},t) + \int d^3r' \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} f(\vec{r},t_{R(A)}) \tag{177}$$

Για το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιήσαμε τη συνάρτηση (173) (ή την (174)) και γράψαμε

$$t_R \equiv t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} \quad , \quad t_A \equiv t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} \tag{178}$$

Η συνάρτηση $\Psi_{0,R(A)}(\vec{r},t)$ είναι λύση της ομογενούς η οποία μεριμνά για τις τυχόν μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.Όπως θα δούμε στη συνέχεια μπορεί να κατασκευαστεί με τη βοήθεια των συναρτήσεων Green που ήδη βρήκαμε.

• Σε **δύο χωρικές διαστάσεις** ο υπολογισμός του διαδότη μπορεί να ξεκινήσει και πάλι από τη σχέση (172) :

$$K_0^{(D=2)}(\vec{r},\vec{r}';t-t') = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty dp \sin(pc\tau)\int_0^{2\pi} d\theta \exp(-ipL\cos\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dp \sin(pc\tau) J_0(pL) = \frac{c}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{c^2\tau^2 - L^2}}\theta(|\tau| - \frac{L}{c}) sign\tau \tag{179}$$

Στην προηγούμενη σχέση J_0 είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης ενώ γράψαμε $L = |\vec{L}| = |\vec{r}-\vec{r}'|$ την απόσταση στις δύο διαστάσεις.

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο έτσι και εδώ μπορούμε να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα με τη μέθοδο της **εμβάπτισης**.

Αν ξεκινήσουμε από τη σχέση (172) μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι

$$\left.\frac{\partial}{\partial z} K_0^{(D=3)}\right|_{z=\pm\infty} = 0$$

Αν τώρα ολοκληρώσουμε τη συντεταγμένη z στις σχέσεις (150) και (151) θα δούμε ότι

$$K_0^{(D=2)}(\vec{r},\vec{r}';\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dz K_0^{(D=3)}\left(\sqrt{L^2+(z-z')^2},\tau\right) \tag{180}$$

Αν συνδυάσουμε τις (172) και (180) θα πάρουμε

$$K_0^{(D=2)}(\vec{r},\vec{r}';\tau) = \frac{c}{2\pi}\int_0^{\infty} dz \frac{1}{\sqrt{L^2+z^2}}\left[\delta\left(c\tau-\sqrt{L^2+z^2}\right)-\delta\left(c\tau+\sqrt{L^2+z^2}\right)\right]$$

αν κάνουμε την αλλαγή $\sqrt{L^2+z^2}=cx$, η προηγούμενη σχέση θα πάρει τη μορφή

$$K_0^{(D=2)}(\vec{r},\vec{r}';\tau) = \frac{c}{2\pi}\int_{L/c}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{c^2x^2-L^2}}\left[\delta\left(\tau-x\right)-\delta\left(\tau+x\right)\right] =$$

$$= \frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\theta(x-L/c)}{\sqrt{c^2x^2-L^2}}\left[\delta\left(\tau-x\right)-\delta\left(\tau+x\right)\right] =$$

$$= \frac{c}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{c^2\tau^2-L^2}}\left[\theta(\tau-\frac{L}{c})-\theta(-\tau-\frac{L}{c})\right]$$

ακριβώς, δηλαδή, το αποτέλεσμα (179).

Έτσι οι συναρτήσεις Green, σε δύο χωρικές διαστάσεις, είναι :

$$G_{0,R}^{(D=2)}(\vec{r},\vec{r}';t-t') = \frac{c}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{c^2(t-t')^2-(\vec{r}-\vec{r}')^2}}\theta\left[(t-t')-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right]\theta(t-t') \tag{181}$$

$$G_{0,A}^{(D=2)}(\vec{r},\vec{r}';t-t') = \frac{c}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{c^2(t-t')^2-(\vec{r}-\vec{r}')^2}}\theta\left[(t'-t)-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right]\theta(t'-t) \tag{182}$$

- Σε **μία χωρική διάσταση** αν ξεκινήσουμε από τη σχέση (172) θα έχουμε

$$K_0^{(D=1)}(x,x';\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{\sin(pc\tau)}{p}\exp[-ip(x-x')] = \frac{c}{2}\theta(\tau-\frac{|x-x'|}{c})sign\tau \tag{183}$$

Στο αποτέλεσμα αυτό μπορούμε να καταλήξουμε και με τη μέθοδο της εμβάπτισης :

$$K_0^{(D=1)}(x,x';\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}dyK_0^{(D=2)}(L,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_{-\infty}^{\infty}dyK_0^{(D=3)}(R,\tau) \quad (184)$$

Έτσι ή αλλιώς οι συναρτήσεις Green σε μία χωρική διάσταση έχουν τη μορφή

$$G_{0,R}^{(D=1)}(x,x';t-t')=\frac{c}{2}\theta\left(t-t'-\frac{|x-x'|}{c}\right)\theta(t-t') \quad (185)$$

$$G_{0,A}^{(D=1)}(x,x';t-t')=\frac{c}{2}\theta\left(t'-t-\frac{|x-x'|}{c}\right)\theta(t'-t) \quad (186)$$

Προβλήματα με ομογενείς συνοριακές συνθήκες

'Οταν το πρόβλημά μας συνοδεύεται από συγκεκριμένες (ομογενείς) συνοριακές χωρικές συνθήκες, οι δρόμοι που έχουμε μπροστά μας είναι δύο. Είτε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ειδώλων είτε να βρούμε τις ιδιοσυναρτήσεις του (χωρικού μέρους του) διαφορικού τελεστή οι οποίες ικανοποιούν τις δεδομένες συνθήκες. Σε κάθε περίπτωση το χωρικό πρόβλημα καθορίζεται από την εξίσωση (155) η οποία αντιστοιχεί στην εξίσωση Helmholtz και επομένως είναι σε ισχύ όλη η ανάλυση του προηγουμένου κεφαλαίου.

• Για την εφαρμογή της τεχνικής των ειδώλων είναι, συνήθως, χρήσιμο να ξεκινάμε από την πλήρη συνάρτηση Green. Ως παράδειγμα, ας πούμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε την Retarded συνάρτηση Green στην περιοχή $z>0$ με την απαίτηση στο επίπεδο $z=0$ να μηδενίζεται η ίδια (Dirichlet) ή η παράγωγός της (Neumann).'Οπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο αφετηρία μας θα είναι ο συνδυασμός

$$G_R(\vec{r},\vec{r};t-t')=G_{0,R}(\vec{r},\vec{r};t-t')+\Lambda(\vec{r},\vec{r}';t-t') \quad (187)$$

στον οποίο $G_{0,R}$ είναι η συνάρτηση Green (175) και Λ λύση της ομογενούς την οποία πρέπει να διαλέξουμε έτσι ώστε η (187) να είναι η ζητούμενη συνάρτηση Green. Η κρίσιμη παρατήρηση είναι,και εδώ, ότι η συνάρτηση

$$\Lambda(\vec{r},\vec{r}';t-t')=A(\vec{r}')G_{0,R}(\vec{r},\vec{q}(\vec{r}');t-t') \quad (188)$$

είναι λύση της ομογενούς κυματικής εξίσωσης στην περιοχή $z>0$ αρκεί $q_z<0$. Η ανάλυση από εδώ και πέρα μπορεί να προχωρήσει όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο και η επιλογή $\vec{q}=(x',y',-z')$, $A=\mp1$ θα δώσει την απάντηση στο προβλήμά μας.

• Η χρήση των ιδιοσυναρτήσεων του (χωρικού τμήματος) του διαφορικού τελεστή θα ξεκινήσει από την εξ. (155).
Έστω ότι έχουμε λύσει το πρόβλημα

$$\vec{\nabla}^2\varphi_{\underline{n}}(\vec{r}) = \lambda_n\varphi_{\underline{n}}(\vec{r}) \equiv -\frac{\omega_n^2}{c^2}\varphi_{\underline{n}}(\vec{r}) \quad (\ \omega_n \geq 0\,) \tag{189}$$

Σύμφωνα με όσα έχουμε πεί η λύση στο πρόβλημα (155) μπορεί να βρεθεί αμέσως :

$$g(\vec{r},\vec{r}\,';p_0) = -\frac{c^2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\underline{n}}\frac{\varphi_{\underline{n}}(\vec{r})\varphi_{\underline{n}}^*(\vec{r}\,')}{p_0^2-\omega_n^2} \tag{190}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (161) θα πάρουμε

$$G^{\pm}(\vec{r},\vec{r}\,';t-t') = -\lim_{\varepsilon\to 0}c^2\sum_{\underline{n}}\varphi_{\underline{n}}(\vec{r})\varphi_{\underline{n}}^*(\vec{r}\,')\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\frac{\exp[ip_0(t-t')]}{(p_0\pm i\varepsilon)^2-\omega_n^2} \tag{191}$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος έχει ήδη πραγματοποιηθεί στη σχέση (165) :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\frac{\exp[ip_0(t-t')]}{(p_0\pm i\varepsilon)^2-\omega_n^2} = \pm\frac{\sin[\omega_n(t-t')]}{\omega_n}\theta[\mp(t-t')] \tag{192}$$

Επομένως η συνάρτηση G^- αντιστοιχεί στην G_R και η G^+ στην G_A :

$$G_R(\vec{r},\vec{r}\,';t-t') = \theta(t-t')c^2\sum_{\underline{n}}\varphi_{\underline{n}}(\vec{r})\varphi_{\underline{n}}^*(\vec{r}\,')\frac{\sin[\omega_n(t-t')]}{\omega_n} \tag{193}$$

$$G_A(\vec{r},\vec{r}\,';t-t') = -\theta(t'-t)c^2\sum_{\underline{n}}\varphi_{\underline{n}}(\vec{r})\varphi_{\underline{n}}^*(\vec{r}\,')\frac{\sin[\omega_n(t-t')]}{\omega_n} \tag{194}$$

Όπως φαίνεται από τις σχέσεις αυτές οι συνοριακές συνθήκες Neumann που επιτρέπουν την $\varphi = \frac{1}{\sqrt{V}}$ ως ιδιοσυνάρτηση με μηδενική ιδιοτιμή δεν δημιουργούν πρόβλημα στον προσδιορισμό των συναρτήσεων Green αφού καθώς $\omega_n \to 0$, $\frac{\sin[\omega_n(t-t')]}{\omega_n} \to t-t'$.