Επεξήγηση για τη λύση (και βαθμολόγηση) στο ερώτημα 2, Θέμα 1 της εξέτασης της 11/2/2026

Ερώτημα

Βρείτε το ανάπτυγμα Mittag-Leffler της συνάρτησης $f(z) = \sec(\pi z)$ και κατόπιν χρησιμοποιείστε το για να υπολογίσετε το άπειρο άθροισμα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2}$ με **ολοκλήρωση στο μιγαδικό επίπεδο**.
(β.=3.0)

Το ανάπτυγμα Mittag-Leffler μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$\sec(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \frac{1}{z-(n+\frac{1}{2})}$$

ή εναλλακτικά

$$\sec(\pi z) = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \left(\frac{1}{z-(n+\frac{1}{2})} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \right)$$

Στην τελική βαθμολόγηση όποιος έγραψε μία από τις δύο σχέσεις πήρε 2 μονάδες. Στις ανωτέρω μορφές δεν είναι σαφής η σύγκλιση της αντίστοιχης σειράς οπότε θα πρέπει κανείς να κάνει το ταίριασμα όρων όπως το κάναμε στο μάθημα ($\pm(n+\frac{1}{2})$) ή να βρει έναν άλλο εναλλακτικό τρόπο με τον οποίο να φαίνεται η σύγκλιση της σειράς γράφοντας παράλληλα το άθροισμα από $n=0$ έως ∞. Έτσι μπορεί κανείς να καταλήξει στις μορφές:

$$\sec(\pi z) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+\frac{1}{2}}{(n+\frac{1}{2})^2 - z^2}$$

ή

$$\sec(\pi z) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z}{z^2 - (n+\frac{1}{2})^2}$$

όπου φαίνεται ξεκάθαρα η σύγκλιση της σειράς. Αν και στην πρώτη περίπτωση η απόδειξη σύγκλισης απαιτεί και ένα ενδιάμεσο βήμα όποιος έγραψε μία από τις δύο αυτές σχέσεις πήρε 1 μονάδα.

Στην αναβαθμολόγηση αφαιρέθηκε τελείως ο υπολογισμός του αθροίσματος. Ο λόγος είναι ότι το ζητούμενο άθροισμα περιέχει την Καταλονική σταθερά $G \approx 0.92$ και επομένως δεν μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς μέσω της μεθόδου που έχουμε κάνει στο μάθημα. Αυτό που μπορούσε να δείξει κανείς είναι ότι το ζητούμενο άθροισμα μπορεί να γραφτεί ως το ολοκλήρωμα

$$\frac{-i}{2}\oint dz \frac{\sec(\pi z)}{z^2}$$

σε μια διαδρομή ορθογωνίου παραλληλογράμμου που είναι ημιάπειρη και περιέχει όλους τους πόλους στον θετικό πραγματικό ημιάξονα (με ή χωρίς το μηδέν δεν παίζει ρόλο, σκεφτείτε το γιατί). Εδώ χρειαζόταν μια απόδειξη για την επί μέρους συνεισφορά των τμημάτων του συνόρου που είχε κάποιες πράξεις.