

# Ασκήσεις Μιγαδικής Ανάλυσης

## Τετραδόνια (Quaternions)

Θεωρούμε το σώμα των τετραδονίων

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

με

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

1. Έστω

$$q = 1 + 2i - j + k.$$

(α') Υπολογίστε το συζυγές  $\bar{q}$ .

(β') Υπολογίστε τη νόρμα  $|q|$ .

(γ') Βρείτε το αντίστροφο  $q^{-1}$ .

2. Να βρεθούν όλες οι ρίζες της συνάρτησης

$$f(q) = q^2 - 2q + 3$$

θεωρώντας ότι  $q \in \mathbb{H}$ .

3. Έστω τα καθαρά φανταστικά τετραδόνια

$$p = i + j, \quad q = j + k.$$

(α') Υπολογίστε τα  $pq$  και  $qp$ .

(β') Δείξτε ότι

$$pq - qp = 2p \times q,$$

όπου  $p \times q$  το διανυσματικό γινόμενο στο  $\mathbb{R}^3$ .

4. Έστω το μοναδιαίο τετραδόνιο

$$u = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (ai + bj + ck),$$

όπου  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

(α') Δείξτε ότι  $|u| = 1$ .

(β') Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός

$$v \mapsto uvu^{-1}$$

ορίζει περιστροφή του  $\mathbb{R}^3$ .

(γ') Προσδιορίστε τον άξονα και τη γωνία της περιστροφής.

5. Έστω το καθαρά φανταστικό τετραδόνιο

$$q = bi + cj + dk.$$

(α') Δείξτε ότι

$$e^q = \cos |q| + \frac{q}{|q|} \sin |q|.$$

(β') Συγκρίνετε τον τύπο αυτόν με τον τύπο του Euler για τους μιγαδικούς αριθμούς.

## Εφαρμογές Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

1. Υπολογίστε το

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{1/z}}{z^3} dz.$$

2. Έστω

$$f(z) = \frac{\log(1+z)}{z^2(z-1)}.$$

Υπολογίστε το

$$\oint_{|z|=2} f(z) dz,$$

εξηγώντας προσεκτικά τη συμπεριφορά στο  $z = 0$ .

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\oint_C z^{3/2} dz,$$

όπου το  $C$  είναι ο κύκλος  $|z| = 2$  και η τομή κλάδου βρίσκεται στον αρνητικό πραγματικό άξονα.

4. Υπολογίστε το

$$\oint_C \frac{\ln z}{z^2 + 1} dz,$$

όπου  $\ln z$  είναι ο κύριος κλάδος και το  $C$  κύκλος ακτίνας  $R > 1$ .

5. Χρησιμοποιώντας την διαδρομή της κλειδαρότρυπας, υπολογίστε

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

6. Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2} dx = \frac{\pi^3}{8}.$$

7. Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

χρησιμοποιώντας κατάλληλη ολοκληρωτική συνάρτηση.

8. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}, \quad a \notin \mathbb{Z}.$$

9. Υπολογίστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$$

με χρήση κατάλληλου ολοκληρωτικού υπολοίπου.

10. Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$$

και μελετήστε το όριο καθώς  $a \rightarrow 0^+$ .

## Ανάπτυγμα Mittag–Leffler

1. Βρείτε το ανάπτυγμα Mittag–Leffler της συνάρτησης

$$\pi^2 \csc^2(\pi z)$$

και εξηγήστε πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για υπολογισμό αθροισμάτων.

2. Βρείτε το ανάπτυγμα Mittag–Leffler της συνάρτησης

$$\frac{\sin z}{z(z-\pi)}$$

3. Δίνεται ότι η συνάρτηση  $\Gamma(z)$  έχει απλούς πόλους στα  $z = -n$  με  $n \in \mathbb{N}_0$  (φυσικοί αριθμοί με το μηδέν). Βρείτε το ανάπτυγμα Mittag–Leffler της

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

γνωρίζοντας ότι  $\psi(1) = -\gamma$  όπου  $\gamma \approx 0.577$  η σταθερά Euler–Mascheroni.

4. Βρείτε το ανάπτυγμα Mittag–Leffler της συνάρτησης

$$\frac{1}{(z-a)^2}$$

όπου  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ .

5. Βρείτε το ανάπτυγμα Mittag-Leffler της συνάρτησης

$$\frac{e^z}{z^2(z-1)}$$