3° φυλλάδιο ασκήσεων - απαντήσεις

1. Με βάση το διάγραμμα, οι δύο M100 Κηφείδες κοντά στη γραμμή καλύτερης προσαρμογής έχουν περιόδους και φαινόμενα μεγέθη:

$$\log_{10} P_1 \simeq 1.36 \ , \ V_1 \simeq 26.3$$
$$\log_{10} P_2 \simeq 1.62 \ , \ V_2 \simeq 25.5$$

Με βάση την εξίσωση για τη σχέση περιόδου-λαμπρότητας, τα απόλυτα μεγέθη των αστέρων είναι: $M_{V,1} = -5.24$ $\quad M_{V,2} = -5.97$

Οι αντίστοιχες αποστάσεις για τους Κηφείδες είναι:
(χωρίς απορρόφηση) $d_1 = 20.3\,Mpc$ $\quad d_2 = 19.7\,Mpc$
(με απορρόφηση) $d_1 = 19.0\,Mpc$ $\quad d_2 = 18.4\,Mpc$

Οπότε μία από τις αποστάσεις βρίσκεται στο εύρος $17.1 \pm 1.8\,Mpc$, ενώ οι άλλες είναι εκτός.

2. (a) Θέτοντας $L = L_0 + \delta L$

$R = R_0 + \delta R$

$T = T_0 + \delta T$

στην εξίσωση Stefan-Boltzmann έχουμε:

$$L_0 + \delta L = 4\pi (R_0 + \delta R)^2 \sigma (T_0 + \delta T)^4$$

$$L_0 \left(1 + \frac{\delta L}{L_0}\right) = 4\pi R_0^2 \left(1 + \frac{\delta R}{R_0}\right)^2 \sigma T_0^4 \left(1 + \frac{\delta T}{T_0}\right)^4$$

δεδομένου ότι $L_0 = 4\pi R_0^2 \sigma T_0^4$ έχουμε:

$$\left(1 + \frac{\delta L}{L_0}\right) = \left(1 + 2\frac{\delta R}{R_0} + \dots\right)\left(1 + 4\frac{\delta T}{T_0} + \dots\right)$$

$$\frac{\delta L}{L_0} = 2\frac{\delta R}{R_0} + 4\left(\frac{\delta T}{T_0}\right)$$

από τους όρους πρώτης τάξης.

(β) $TV^{\gamma-1} =$ σταθερό

$\hookrightarrow \; TR^{3(\gamma-1)} =$ σταθερό

$T = T_0 + \delta T \quad , \quad R = R_0 + \delta R$

$$(T_0 + \delta T)(R_0 + \delta R)^{3(\gamma-1)} = T_0 R_0^{3(\gamma-1)}$$

$$T_0 \left(1 + \frac{\delta T}{T_0}\right) R_0^{3(\gamma-1)} \left(1 + \frac{\delta R}{R_0}\right)^{3(\gamma-1)} = T_0 R_0^{3(\gamma-1)}$$

$$\left(1 + \frac{\delta T}{T_0}\right)\left[1 + 3(\gamma-1)\frac{\delta R}{R_0} + \dots\right] = 1$$

$$\frac{\delta T}{T_0} = -3(\gamma-1)\frac{\delta R}{R_0}$$

και με βάση το ερώτημα (α)

$$\frac{\delta L}{L_0} = 2\frac{\delta R}{R_0} + 4\left[-3(\gamma-1)\frac{\delta R}{R_0}\right] =$$

$$= 2(-6\gamma + 7)\frac{\delta R}{R_0}$$

$\gamma = 5/3$

$$\hookrightarrow \; \frac{\delta L}{L_0} = -6\frac{\delta R}{R_0}$$

3. (α) Χονδρικά η μάζα για το η Carinae είναι $120 M_\odot \Rightarrow L_{ED} = 4.6 \cdot 10^6 L_\odot$

Το οποίο είναι αρκετά κοντά στην τιμή του αστεριού
$$5 \cdot 10^6 M_\odot$$
και είναι στο όριο Eddington.

(β) (i) Η απόσταση του η Carinae υπολογίζεται χονδρικά στα $2300 pc$. Με δεδομένο ότι $A_V = 1.7$, $M_V = M_{BOL} \simeq -13.5$ και με χρήση $M_{sun} = 4.74$, $L = 2 \cdot 10^7 L_\odot$

(ii) Αν η φωτεινότητα ισχύει για 20 χρόνια, τότε η συνολική ενέργεια είναι $4.8 \cdot 10^{42} J$

(iii) $K = 1.2 \cdot 10^{42} J$.

(γ) Η γραμμική απόσταση ενός από τους δύο λοβούς είναι $l = (8.5'')(2300 pc)$
$$\simeq 0.095 pc = 20.000 AU = 3 \cdot 10^{15} m$$

Με σταθερό ρυθμό εκτόνωσης $v = 650\,kms^{-1}$

$$\tau = l/v \simeq 4.5 \cdot 10^{9} s \simeq 140 yr$$

Αν κάποια στιγμή υπήρχε επιτάχυνση τότε αυτή η τιμή δεν έχει υπολογιστεί σωστά. (επιτάχυνση π.χ. λόγω πίεσης ακτινοβολίας)

4. Με $f = 0.01$

$$\Delta E_v = \frac{3}{10} f G M_\odot^2 \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

Η ενέργεια που χρειάζεται για να εκτοξευθούν $9M_\odot$ είναι:

$$E_{need} = \frac{9 G M_\odot^2}{\langle r_9 \rangle}$$

όπου $\langle r_9 \rangle$ είναι η μέση ακτίνα των $9M_\odot$ πριν ο πυρήνας καταρρεύσει.

οπότε έχουμε: $r_f = \left(\frac{30}{f \langle r_9 \rangle} + \frac{1}{r_i} \right)^{-1}$

Υποθέτοντας ότι η αρχική ακτίνα του πυρήνα είναι περίπου ως ακτίνας ως Γης ($R_\oplus$) και $\langle r_g \rangle \sim 100 R_\odot$ (χοντρικά για έναν ερυθρο υπεργίγαντα $10 M_\odot$)

οπότε $r_f = 5000 \, km = 0.8 R_\oplus$

$\langle r_g \rangle \sim R_\oplus$ και $r_f = 2 \, km$.

άρα αν υποθέσουμε $\langle r_g \rangle = 1 R_\odot$, $r_f = 220 \, km$

5. $\tau_{1/2} = 77.7 d$, $\lambda = \ln 2 / \tau_{1/2} = 0.0089 d^{-1}$

$$dM/dt = 0.0097 \, mag \, d^{-1}$$

6. (a) $E/A = (4.2 \, MeV)(1.3 \cdot 10^{14} m^{-2}) =$
$= 87 \, J m^{-2}$

Σε απόσταση $d \simeq 50 kpc$
$E = (4\pi d^2)(E/A) = 2.6 \cdot 10^{45} J$

(β) $U_g = -3GM^2/5R = 3 \cdot 10^{46} J$

7. (a) Η μέση πυκνότητα για έναν Λ.Ν. μάζας $0.6 M_\odot$ και ακτίνας $0.012 R_\odot$ είναι:

$$\rho = 4.89 \cdot 10^{8}\ kg m^{-3}$$

και
$$r = \left(\frac{3 A m_H}{4 \pi \rho} \right)^{1/3} = 2.14 \cdot 10^{-12} m$$

με $A = 12$

(β) $Z = 6$
$$T_c = \frac{Z^2 e^2}{4 \pi \epsilon_0 r k \Gamma} = 1.76 \cdot 10^{6} K$$

8 (a)
$$P_{min} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 4.6 \cdot 10^{-4} s$$

(β)
$$R = 0.5 (E + P)$$

και
$$\frac{E - P}{R} = \frac{5 \Omega^2 R^3}{4 G M}$$

για E και P:
$$E = R \left(1 + \frac{5 \Omega^2 R^3}{8 G M} \right)$$

και
$$P = R \left(1 - \frac{5 \Omega^2 R^4}{8 G M} \right)$$

οπότε $$\frac{2\pi}{\underline{\Theta}} = 2P_{min} = 4\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

ή $$\underline{\Theta}^2 = \frac{GM}{R^3}$$

$R = 10\,km$ $E = R\left(1 + \frac{5}{32}\right) = 11.56\,km$

και $$P = R\left(1 - \frac{5}{32}\right) = 8.44\,km$$

9. (α) Από τη σχέση $P\dot{P} = PdP/dt = P_o\dot{P}_o$ έχουμε:

$$\int_{P_o}^{P} P\,dP = P_o\dot{P}_o\int_0^t dt'$$

$$\Longrightarrow P = \left(P_o^2 + 2P_o\dot{P}_o t\right)^{1/2}$$

(β) Σε χρόνο dt, ο pulsar ολοκληρώνει $N = dt/P$ περιστροφές

Το ρολόι του Pulsar $dt_p = P_o dt/P$ όταν ένα ρολόι δείχνει $t = P_o/\dot{P}_o$

Τότε ο αντίστοιχος χρόνος για τον Pulsar είναι:

$$t_p = \int_0^{P_0/\dot{P}_0} \frac{P_0}{P}\, dt =$$

$$= P_0 \int_0^{P_0/\dot{P}_0} \left(P_0^2 + 2P_0 \dot{P}_0 t\right)^{-1/2} dt$$

$$= (\sqrt{3} - 1)\frac{P_0}{\dot{P}_0}$$

10. (α) $r_c = \frac{c^2}{g} = \frac{c^2 R^2}{GM}$

$M = 1.4 M_\odot$, $R = 10^4 m$, $r_c = 4.84 \cdot 10^4 m$.

$R_{NS} \sim 10 km$, οπότε δεν μπορούμε να αγνοούμε τη Γ.Σ. στη μελέτη A.N.

(β) $\Delta t_0 = 1 hr = 3600 s$

$$\Delta t_\infty = \Delta t_0 \left(1 - \frac{2GM}{R_c}\right)^{-1/2} = 4.700 s$$

όμως $\Delta t_{\infty} = \Delta t_0 \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right)^{-1} = 4540s$

Η διαφορά των δύο αποτελεσμάτων είναι γιατί η βαρύτητα δεν είναι ασθενής δύναμη στην επιφάνεια του Α.Ν.