

# Φυσική των Αστέρων 2023-2024

2ο φυλλάδιο ασκήσεων

Παράδοση μέχρι Κυριακή 7/1/2024. Οι ασκήσεις θα επιλυθούν τη Δευτέρα 8/1/2024,

17:00 (σε διαδικτυακή συνάντηση).

Απορίες: dh@phys.uoa.gr, stboula@phys.uoa.gr

Για την εργασία σας μπορείτε να επιλύσετε οποιοσδήποτε 8 από τις παρακάτω 10

ασκήσεις

## Ασκήσεις

1. Η παρακάτω άσκηση είναι από τη θεωρία που διδάχθηκε στο μάθημα 12 (22/11/2023), και βρίσκεται στη διαφάνεια 12. Αν ληφθεί υπόψη η εξωτερική πίεση, τότε η κρίσιμη μάζα για να καταρρεύσει το νέφος (αποδεικνύεται ότι) δίνεται από τη μάζα Bonnor-Ebert:

$$M_{BE} = \frac{c_{BE} v_T^4}{P_0^{1/2} G^{3/2}},$$

όπου  $v_T \equiv \sqrt{kT/\mu m_H}$  η ισόθερμη ταχύτητα ήχου και η αδιάστατη σταθερά  $c_{BE} \simeq 1.18$ .

Δείξτε ότι η μάζα Jeans μπορεί να γραφεί στη μορφή της  $M_{BE}$  με  $c_j \simeq 5.46$ .

2. Αποδείξτε πλήρως τον τύπο (25) - όριο Schonberg-Chandrasekhar από το μάθημα 14-15, διαφάνεια 16.

3. (α) Λαμβάνοντας υπόψη την κατανομή των ταχυτήτων Maxwell-Boltzmann, ποια θερμοκρασία θα απαιτούνταν για να συγκρουστούν δύο πρωτόνια εάν αγνοηθεί το φαινόμενο της χβαντομηχανικής σήραγγας; Υποθέστε ότι πυρήνες με ταχύτητες δέκα φορές μεγαλύτερες από την τιμή της τετραγωνικής μέσης τιμής για την κατανομή Maxwell-Boltzmann μπορούν να ξεπεράσουν το φράγμα Coulomb. Συγκρίνετε την απάντησή σας με την εκτιμώμενη κεντρική θερμοκρασία του Ήλιου.

(β) Χρησιμοποιώντας την εξίσωση

$$n_u du = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mu^2/2kT} 4\pi u^2 du,$$

υπολογίστε τον λόγο του αριθμού των πρωτονίων που έχουν ταχύτητες δέκα φορές την τιμή της τετραγωνικής μέσης τιμής σε σχέση με αυτούς που κινούνται με την τιμή της τετραγωνικής μέσης τιμής.

(γ) Υποθέτοντας (εσφαλμένα) ότι ο Ήλιος αποτελείται από καθαρό υδρογόνο, εκτιμήστε τον αριθμό των πυρήνων υδρογόνου στον Ήλιο. Θα μπορούσαν να υπάρχουν αρκετά πρωτόνια που να κινούνται με ταχύτητα δέκα φορές της τιμής της τετραγωνικής μέσης τιμής για να εξηγήσουν τη φωτεινότητα του Ήλιου;

4. Υπολογίστε το λόγο του ρυθμού παραγωγής ενέργειας για την αλυσίδα πρωτονίου-πρωτονίου (pp) προς τον κύκλο CNO, δεδομένου των χαρακτηριστικών συνθηκών για το κέντρο του σημερινού (εξελιγμένου) Ήλιου, δηλαδή  $T = 1.5696 \times 10^7$  K,  $\rho = 1.527 \times 10^5$  kg m<sup>-3</sup>,  $X = 0.3397$ , και  $X_{\text{CNO}} = 0.0141$ . Υποθέστε ότι ο παράγοντας θωράκισης (σφρεενινγ) για την αλυσίδα pp είναι μονάδα ( $f_{pp} = 1$ ) και ότι ο παράγοντας διόρθωσης διακλαδώσεων της αλυσίδας pp είναι επίσης μονάδα ( $\psi_{pp} = 1$ ).

5. Εκτιμήστε το χρόνο καύσης υδρογόνου για αστέρες κοντά στα κατώτερα και ανώτερα άκρα της κύριας ακολουθίας. Το κατώτερο άκρο της κύριας ακολουθίας εμφανίζεται κοντά στα  $0.072M_{\odot}$ , με  $\log_{10} T_{\text{eff}} = 3.23$ ,  $\log_{10}(L/L_{\odot}) = 4.3$ . Από την άλλη πλευρά, ένας αστέρας με μάζα  $85M_{\odot}$  βρίσκεται κοντά στο ανώτερο άκρο της κύριας ακολουθίας και έχει ενεργό θερμοκρασία και φωτεινότητα  $\log_{10} T_{\text{eff}} = 4.705$ ,  $\log_{10}(L/L_{\odot}) = 6.006$  αντίστοιχα. Υποθέστε ότι ο αστέρας μάζας  $0.072M_{\odot}$  είναι εξ ολοκλήρου συμπαγής, έτσι ώστε όλο το υδρογόνο του να είναι διαθέσιμο για καύση, αντί για μόνο το 10% του εσωτερικού του.

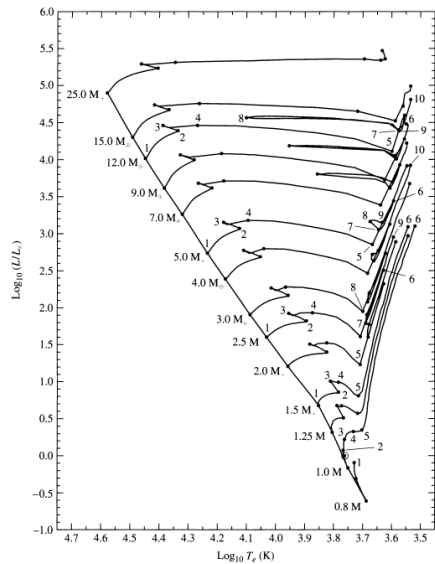
6. (α) Εκτιμήστε τη φωτεινότητα Eddington ενός αστέρα μάζας  $0.072M_{\odot}$  και συγκρίνετε την απάντησή σας με τη φωτεινότητα στην κύρια ακολουθία που δίνεται στην άσκηση 5. Υποθέστε  $\bar{\kappa} = 0.001$  m<sup>2</sup> kg<sup>-1</sup>. Είναι σημαντική η πίεση ακτινοβολίας για τη σταθερότητα ενός αστέρα κύριας ακολουθίας χαμηλής μάζας;

(β) Αν ένας αστέρας μάζας  $120M_{\odot}$  δημιουργείται με  $\log_{10} T_{\text{eff}} = 4.727$ ,  $\log_{10}(L/L_{\odot}) = 6.252$  εκτιμήστε τη φωτεινότητα Eddington, υποθέτοντας ότι η απόδοση οφείλεται στη σκέδαση ηλεκτρονίων. Συγκρίνετε την απάντησή σας με την πραγματική φωτεινότητα του αστέρα.

7. Εκτιμήστε τη χρονική κλίμακα Kelvin-Helmholtz για έναν αστέρα μάζας  $5M_{\odot}$  στον κλάδο των υπογιγάντων και συγκρίνετε το αποτέλεσμα σας με το χρονικό διάστημα που ο αστέρας δαπανά μεταξύ των σημείων 4 και 5 στο Σχήμα 1.

8. Κατά τη διάρκεια της πρώτης φάσης dredge-up ενός αστέρα μάζας  $5M_{\odot}$  θα περιμένατε να αυξηθεί ή να μειωθεί ο λόγος περιεκτικότητας των ισοτόπων  $^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$ ,  $X_{13}/X_{12}$ ; Εξηγήστε το σκεπτικό σας. Υπόδειξη: Μπορείτε να βρείτε χρήσιμες πληροφορίες στο Σχήμα 2.

9. Σε μια προσπάθεια να αναγνωρίσουν τα σημαντικά στοιχεία της απώλειας μάζας στους αστέρες του κλάδου των AGB, διάφοροι ερευνητές έχουν προτείνει παραμετροποιήσεις του ρυθμού απώλειας μάζας που βασίζονται στην προσαρμογή παρατηρημένων ρυθμών για ένα συγκεκριμένο σύνολο αστέρων με μια γενική εξίσωση που περιλαμβάνει μετρήσιμες ποσότητες που σχετίζονται με τους αστέρες στο δείγμα. Μία από τις πιο δημοφιλείς, αναπτυγμένη από τον D. Reimers, δίνεται από τη σχέση:



Σχήμα 1: Η κύρια ακολουθία (από Carrol & Ostlie).

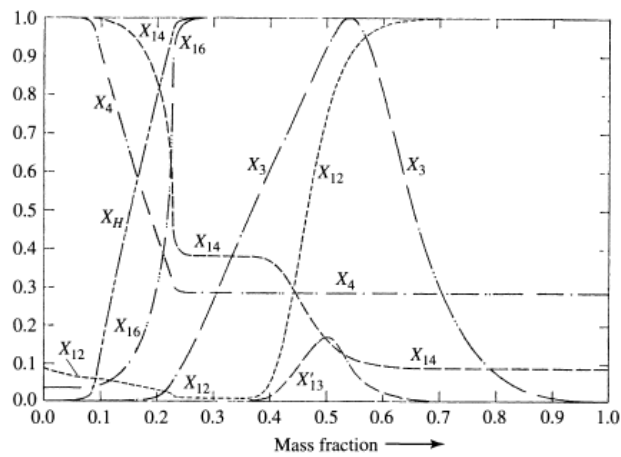
$$\dot{M} = -4 \times 10^{-13} \eta \frac{L}{gR} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$$

όπου  $L$ ,  $g$  και  $R$  είναι η φωτεινότητα, η επιφανειακή βαρύτητα και ο ακτίνα του αστέρα αντίστοιχα (όλα σε ηλιακές μονάδες,  $g_0 = 274 \text{ m s}^{-2}$ ). Το  $\eta$  είναι μία ελεύθερη παράμετρος της οποίας η τιμή αναμένεται να είναι κοντά στη μονάδα. Παρατηρήστε ότι έχει συμπεριληφθεί το αρνητικό πρόσημο, το οποίο υποδεικνύει ότι η μάζα του αστέρα μειώνεται.

(α) Εξηγήστε ποιοτικά γιατί οι μεταβλητές  $L$ ,  $g$  και  $R$  εμφανίζονται με τον τρόπο που εμφανίζονται στην εξίσωση.

(β) Εκτιμήστε τον ρυθμό απώλειας μάζας ενός αστέρα AGB μάζας  $1 M_{\odot}$  που έχει φωτεινότητα  $7000 L_{\odot}$  και θερμοκρασία  $3000 \text{ K}$ .

**10.** Μια παλιά θεωρία για την εξέλιξη των αστερών, δημοφιλής στις αρχές του εικοστού αιώνα, υποστήριζε ότι οι αστέρες ξεκινούν τη ζωή τους ως μεγάλες, ψυχρές σφαίρες αερίου, όπως οι γιγαντιαίοι αστέρες στο διάγραμμα H-R. Στη συνέχεια συσπώνται και θερμαίνονται υπό την έλξη της δικής τους βαρύτητας για να γίνουν ζεστοί, φωτεινοί μπλε αστέρες τύπου O. Καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής τους χάνουν ενέργεια, γίνονται πιο αμυδροί και πιο κόκκινοι καθώς γερνούν. Καθώς κινούνται αργά κατά μήκος της κύριας ακολουθίας, τελικά καταλήγουν ως ψυχροί, αμυδροί κόκκινοι αστέρες τύπου M. Εξηγήστε πώς οι παρατηρήσεις αστρικών σημηνών, σχεδιάζοντας το κατάλληλο διάγραμμα H-R, αναιρούν αυτήν την ιδέα.



Σχήμα 2: Η χημική σύνθεση ως συνάρτηση του ποσοστού εσωτερικής μάζας για έναν αστέρα μάζας  $5M_{\odot}$  κατά τη φάση συνολικής συστολής, ακολουθώντας τη φάση της κύριας ακολουθίας κατά την καύση του υδρογόνου στην πυρήνα. Οι μέγιστες ποσοστώσεις μάζας είναι  $X_H = 0.708$ ,  $X_3 = 1.296 \times 10^{-4}$  ( ${}^3\text{He}$ ),  $X_4 = 0.9762$  ( ${}^4\text{He}$ ),  $X_{12} = 3.61 \times 10^{-3}$  ( ${}^{12}\text{He}$ ),  $X_3 = 3.61 \times 10^{-3}$  ( ${}^{13}\text{C}$ ),  $X_{14} = 0.0145$  ( ${}^{14}\text{N}$ ) και  $X_{16} = 0.01080$  ( ${}^{16}\text{O}$ ) (από Carrol & Ostlie).