Οι απαντήσεις είναι συνοπτικές για καθοδήγηση. Η πλήρης επίλυση απαιτεί επεξηγήσεις και δικαιολόγηση του εκάστοτε αποτελέσματος.

Συνοπτικές απαντήσεις ασκήσεων από τα φυλλάδια του e-class.

1ο φυλλάδιο

1. Η συνάρτηση Planck στο χώρο των συχνοτήτων:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\left(\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}\right)$$

$$B_\nu d\nu = B_\lambda d\lambda \quad (1)$$

$$B_\lambda = B_\nu \frac{d\nu}{d\lambda}$$ όμως από τη σχέση $\nu = \frac{c}{\lambda}$ έχουμε $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{c}{\lambda^2}$

αντικαθιστούμε στην (1) και ολοκληρώνουμε:

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} B_\nu d\nu = -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B_\lambda d\lambda$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B_\nu\left(-\frac{c}{\lambda^2}\right)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B_\lambda d\lambda \Rightarrow \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B_\nu\left(-\frac{c}{\lambda^2}\right)d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B_\lambda d\lambda$$

οπότε $B_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} B_\nu$ και προκύπτει:

$$B_\lambda = \frac{2hc^3}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}$$

2. Θεωρούμε ότι ο φούρνος εκπέμπει ως μέλαν σώμα:

$$u = a T^4 = \frac{4\sigma}{c} T^4$$

Από το νόμο του Wien $\lambda_{max} \cdot T = 2.9 \cdot 10^{-3}\,mK$

οπότε $\lambda_{max} = 6.13 \cdot 10^{-6}\,m$

Θεωρούμε μονοενεργητικά φωτόνια: $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda_{max}}$

επίσης για την ενεργειακή πυκνότητα $u = \frac{N\varepsilon}{V}$

οπότε αντικαθιστούμε κι έχουμε

$$N = \frac{uV}{\varepsilon} = 5.8 \cdot 10^{14} \text{ φωτόνια.}$$

3. Δείτε 1η απάντηση στις ασκήσεις από τις διαδικτυακές συναντήσεις.

4. α

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$$

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} = 0 \quad \text{οπότε} \quad \frac{6h\nu^2}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1} - \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT}-1)}\frac{h}{kT} = 0$$

$x = h\nu/kT$ οπότε έχουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$\frac{6x^2k^2T^2}{hc^2}\frac{1}{e^x-1} - \frac{2x^3k^2T^2}{hc^2}\frac{e^x}{(e^x-1)^2} = 0$$

$$3 - x\frac{e^x}{e^x-1} = 0 \qquad x = 3(1-e^{-x}) \text{ Lambert's } \omega \text{ function.}$$

4. β

$$T_1 = 1.57 \cdot 10^7 \, K$$
$$T_2 = 5777 \, K$$

$$\lambda_{max,1} = \frac{2.9 \cdot 10^{-3}}{1.57 \cdot 10^7} m = 1,85 \cdot 10^{-10} m$$

$$\lambda_{max,2} = \frac{2.9 \cdot 10^{-3}}{5777} m = 5.02 \cdot 10^{-7} m$$

$$\epsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_{max,1}} = 6708,8 eV \qquad \epsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_{max,2}} = 2,47 eV$$

5.

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -a_\nu I_\nu \qquad \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu$$

$$\frac{dI_\nu}{I_\nu} = -d\tau_\nu \Rightarrow I_\nu = I_{\nu,0}\, e^{-\tau_\nu}$$

$$\tau_\nu = \int_0^R a_\nu ds \simeq a_\nu R$$

$$I_\nu \simeq I_{\nu 0}\, e^{-a_\nu R} \quad , \quad u = \frac{1}{c}\int I\, d\Omega \Rightarrow u = \frac{4\pi}{c} I$$

$$u = \frac{n\epsilon}{V} \quad \text{αρα} \quad n \propto e^{-a_\nu R}$$

$$\frac{d\epsilon}{d\nu} = \frac{4\pi}{c} I_\nu \qquad N d\epsilon \simeq \frac{4\pi}{c} I_\nu \qquad I_\nu \sim N$$

οπότε τα φωτόνια που απορροφούνται $N' = N_0 - N e^{-a_\nu R} =$
$= N_0 (1 - e^{-\tau_\nu})$

$\boxed{6.}$ $$F_\nu = \int I_\nu \cos\theta\, d\Omega = I_\nu \int_0^{2\pi}\int_0^{\vartheta_0} \cos\theta \sin\theta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$\sin\vartheta_0 = \frac{R}{D}$$

$\sin\vartheta_0 = R/D$

$$F_\nu = 2\pi I_\nu \int_{\mu_0}^{\mu} \mu\, d\mu \quad , \quad \mu_0 = \cos\vartheta_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{D}\right)^2}$$

$$F_\nu = \pi I_\nu (1 - \mu_0) = \pi I_\nu \frac{R^2}{D^2}$$

και στην επιφάνεια της σφαίρας $F_\nu = I_\nu \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$
$\Rightarrow F_\nu = \pi I_\nu$

$\boxed{7.}$ Μέθοδος τυχαίων διαδρομών:

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \ldots + \vec{r}_N$$

$$\langle R^2 \rangle = \langle r_1^2 \rangle + \ldots + \langle r_n^2 \rangle + 2\langle \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \rangle + \ldots + 2\langle \vec{r}_{N-1} + \vec{r}_N \rangle$$

$\langle r_i^2 \rangle = l_2 \qquad \langle \vec{r}_{i-1} \cdot \vec{r}_i \rangle 0$ γιατί $\langle \cos\theta \rangle = 0$

$$\langle r_{i-1} \cdot r_i \cdot \cos\theta \rangle = \langle r_{i-1} \rangle \langle r_i \rangle \langle \cos\vartheta \rangle$$

οπότε $\langle R^2 \rangle = N \bar{l}^2 = l_*^2$

οπότε η μέση απομάκρυνση είναι: $l_* = \sqrt{N}\, \bar{l}$

Διαφυγή από άστρο ακτίνας L

Πρέπει $l_* = L = \sqrt{N}\,\bar{l} \Rightarrow N_{sc} = \dfrac{L^2}{\bar{l}^2}$

όμως $\bar{l} = \dfrac{1}{\sigma_\nu} \Rightarrow \bar{l}^2 = \dfrac{1}{\sigma_\nu^2}$

και $\tau_\nu = \sigma_\nu ds = \sigma_\nu L \Rightarrow L = \dfrac{\tau_\nu^2}{\sigma_\nu^2}$

$N_{sc} = \tau_\nu^2$ πλήθος των συγκρούσεων μέχρι τη διαφυγή

8. $\dfrac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - a_\nu I_\nu \Rightarrow \dfrac{dI_\nu}{a_\nu dS} = \dfrac{j_\nu}{a_\nu} - I_\nu \Rightarrow$

$\dfrac{d\left(\frac{j_\nu}{a_\nu} - I_\nu\right)}{\frac{j_\nu}{a_\nu} - I_\nu} = -a_\nu ds$ και $\dfrac{j_\nu}{a_\nu} - I_\nu = \Gamma e^{-a_\nu S}$

με $I_\nu \Big|_{S=0} = 0$ άρα $\Gamma = \dfrac{j_\nu}{a_\nu}$ και $I_\nu = \dfrac{j_\nu}{a_\nu}\left(1 - e^{-a_\nu S}\right)$

δηλαδή $I_\nu \Big|_{S=D} = \dfrac{j_\nu}{a_\nu}\left(1 - e^{-a_\nu D}\right)$ για $\nu_{min} \le \nu \le \nu_{max}$ έχουμε:

$I_\nu = \dfrac{A}{\nu B\left[\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^2 - 1\right]}\left\{1 - e^{-BD\left[\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^2 - 1\right]}\right\}$, η ροή είναι $F = \displaystyle\int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} F_\nu d\nu$

$F_\nu = 2\pi I_\nu = \dfrac{2\pi A}{B_1\left[\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^2 - 1\right]}\left\{1 - e^{-BD\left[\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^2 - 1\right]}\right\}$ άρα

$F = \displaystyle\int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} \dfrac{2\pi A}{B\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)\left[\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right)^2 - 1\right]}\, d\nu/\nu_1$ θέτουμε $\nu/\nu_1 = x$ κι έχουμε:

$F = \displaystyle\int_{x_{min}}^{x_{max}} \dfrac{2\pi A}{B}\dfrac{x\,dx}{x^2(x^2-1)} = \dfrac{\pi A}{B}\int_{x_{min}}^{x_{max}} \dfrac{dx^2}{x^2(x^2-1)}$, θέτουμε $z = x^2$

οπότε $F = \dfrac{\pi A}{B}\displaystyle\int_{z_{min}}^{z_{max}} \dfrac{dz}{z(z-1)} = \dfrac{\pi A}{B} \ln\left(1 - \dfrac{1}{z}\right)\Bigg|_{z_{min}}^{z_{max}}$

και τελικά

$F = \dfrac{\pi A}{B} \ln\left(\dfrac{1 - (\nu_1/\nu_{max})^2}{1 - (\nu_1/\nu_{min})^2}\right) = \dfrac{\pi A}{B} \ln\left(\dfrac{\nu_{max}^2 - \nu_1^2}{\nu_{max}^2 - \nu_1^2}\right)$

2ο φυλλάδιο

1. Από την εξίσωση $\langle I \rangle = \frac{1}{2}(I_{out}+I_{in})$ αντικαθιστούμε στην $\langle I \rangle = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4 \left(\tau_v + \frac{2}{3}\right)$ κι έχουμε:

$$I_{out}+I_{in} = \frac{3\sigma}{4\pi}T_e^4\left(\tau_v+\frac{2}{3}\right) \quad (A)$$

και από την $F_{rad} = \pi(I_{out}-I_{in})$ και $F_{rad}=constant=\sigma T_e^4$ έχουμε:

$$I_{out}-I_{in} = \frac{\sigma}{\pi}T_e^4 \quad (B)$$

Στη συνέχεια προσθέτουμε τις (A) και (B):

$$I_{out} = \frac{\sigma}{\pi}T_e^4\left(\frac{3}{4}\tau_v+1\right)$$

και μετά αφαιρούμε από τη (B) την (A):

$$I_{in} = \frac{3\sigma}{4\pi}T_e^4\tau_v$$

Από το ισοτροπικό πεδίο: $$\frac{I_{out}-I_{in}}{\frac{1}{2}(I_{out}+I_{in})} = 0.01$$

αντικαθιστούμε τις παραπάνω κι έχουμε:

$$\frac{\sigma T_e^4/\pi}{1/2\left[\left(\frac{3\sigma T_e^4}{2\pi}\left(\tau_v+\frac{2}{3}\right)\right]\right.} = 0.01 \Rightarrow \frac{4}{3\tau_v+2}=0.01$$

οπότε το οπτικό βάθος είναι $\tau_v = 1.33$

2. Από την εξίσωση $I_\lambda(0) = I_\lambda e^{-\tau_\lambda} - \int_{\tau_\lambda}^{0} S_\lambda e^{-\tau'_\lambda} d\tau'_\lambda$, εφόσον η συνάρτηση πηγής δεν εξαρτάται από τη θέση τότε την ολοκληρώναμε και παίρνουμε:

$$I_\lambda(0) = I_\lambda e^{-\tau_\lambda} + S_\lambda\left(1-e^{-\tau_\lambda}\right)$$

κι έχουμε δύο περιπτώσεις:

$\tau_\lambda >> 1$ τότε $S_\lambda = B_\lambda$ (θερμοδυναμική ισορροπία)

και $I_\lambda(0) = S_\lambda = B_\lambda$: ακτινοβολία μέλανος σώματος

$\tau_\lambda << 1$ $\quad e^{-x} \simeq 1 - x$

οπότε $I_\lambda(0) = I_\lambda(1-\tau_\lambda) + S_\lambda[1(1-\tau_\lambda)] =$

$= I_\lambda - \tau_\lambda (I_\lambda - S_\lambda)$

και για την πλάκα πάχους L $\quad \tau_\lambda = k_\lambda \rho L$

οπότε $I_{\lambda,0} \simeq I_\lambda - k_\lambda \rho L (I_\lambda - S_\lambda)$

Αν $I_\lambda > S_\lambda$ τότε θα έχουμε γραμμές απορρόφησης σε υπέρθεση με το I_λ. Αν $I_\lambda < S_\lambda$ τότε αντίστοιχα θα έχουμε γραμμές εκπομπής σε υπέρθεση με το I_λ.
Η ένταση των γραμμών εξαρτάται από το ποια διαδικασία είναι πιο "ισχυρή". Από τον ορισμό της συνάρτησης πηγής έχουμε: $S_\lambda \equiv j_\lambda / k_\lambda$

οπότε $I_{\lambda,0} \simeq I_\lambda - \rho L (k_\lambda I_\lambda - j_\lambda)$

3. Με βάση τα δεδομένα της άσκησης: (1) : 1093.8nm

$\log_{10}(w/\lambda) = -3.697$ για την (1) $\quad$ (2) : 1004.9nm

$= -3.798$ για τη (2)

Από την καμπύλη ανάπτυξης για τον Ήλιο:

$\log_{10}\left(\frac{f N_a \lambda}{500nm}\right) = \begin{matrix} 19.21 & (1) \\ 18.96 & (2) \end{matrix}$

$\log_{10}\left(\frac{f \lambda}{500nm}\right) = \begin{matrix} 0.9165 & (1) \\ -1.2671 & (2) \end{matrix}$ $\quad$ και από τη σχέση:

$\log_{10} N_a = \log_{10}\left(\frac{f N_a \lambda}{500nm}\right) - \log_{10}\left(\frac{f\lambda}{500nm}\right) \Rightarrow \log_{10} N_a = \begin{matrix} 20.13 & (1) \\ 20.23 & (2) \end{matrix}$

οπότε Μ.Ο. $< \log N_a > = 20.18 \Rightarrow < N_a > \simeq 1.51 \cdot 10^{20}$ #$/m^2$

6. ο # ουδέτερων ατόμων υδρογόνου ανά μονάδα επιφάνειας σε e^- με $n=3$

3ο φυλλάδιο

1. Θεωρία

2. $P_{αερ} = \frac{\rho k T}{m_H \mu} \overset{\rho = N/V}{=} \frac{kT}{\mu m_H} \frac{3M}{4\pi R^3}$

$P^{(1)}_{αερ} = \frac{kT_1}{\mu m_H} \frac{3M}{4\pi R_1^3}$ $\quad$ $P^{(2)}_{αερ} = \frac{kT_2}{\mu m_H} \frac{3M}{4\pi R_2^3}$

Πίεση εκφυλισμού για τη μη σχετικιστική περίπτωση:

$$P_{εκφ} \propto \rho^{5/3} = \left(\frac{3M}{4\pi R^3}\right)^{5/3}$$

$P^{(1)}_{εκφ} \propto \left(\frac{3M_1}{4\pi R_1^3}\right)^{5/3}$ $\quad$ $P^{(2)}_{εκφ} \propto \left(\frac{3M_1}{4\pi R_2^3}\right)^{5/3}$

$\frac{P^{(1)}_{αερ}}{P^{(2)}_{αερ}} = \frac{1}{10} \cdot 10^{-3} = 10^{-4}$ $\quad$ $\frac{P^{(1)}_{εκφ}}{P^{(2)}_{εκφ}} \simeq 10^{-5}$

$P^{(1)}_{αερ} / P^{(1)}_{εκφ} = 10$ αντικαθιστάμε $10^{-4} P^{(2)}_{αερ} = 10 \cdot 10^{-5} P^{(2)}_{εκφ}$

$$\Rightarrow \frac{P^{(2)}_{αερ}}{P^{(2)}_{εκφ}} = 1$$

άρα έχουμε κατάρρευση σε Λευκό Νάνο.

3. Θεωρία

4. Παραγωγίζουμε: $\frac{\partial P_{ic}}{\partial M_{ic}} = \frac{3}{4\pi R_{ic}} \left(\frac{kT_{ic}}{\mu_{ic} m_H} - \frac{2}{5} \frac{G M_{ic}}{R_{ic}}\right) = 0$

Λύνοντας βρίσκουμε την R_{ic} και αντικαθιστούμε στην αρχική οπότε προκύπτει η ζητούμενη.

5. Έχουμε δύο πυρήνες ηλίου που αλληλεπιδρούν οπότε:

$$\mu_m = m_{He} m_{He} / (m_{He} + m_{He}) = m_{He}/2 = 2u$$

έχουμε $Z_1 = Z_2 = 2$

οπότε με αντικατάσταση στη δοσμένη εξίσωση έχουμε

$$T_{quantum} = 6 \times 10^8 K.$$

6. (α) Για την επιτάχυνση της βαρύτητας έχουμε $g = GM/r^2$

οπότε αντίστοιχα αν πάμε σε ηλιακές μονάδες θα έχουμε $g/g_0 = M/R^2$ όπου τα M και R δίνονται κανονικοποιημένα ως προς $M_\odot$ και $R_\odot$.

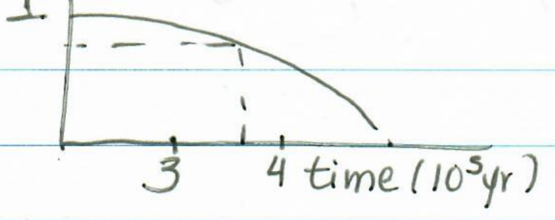
Αντικαθιστούμε και παίρνουμε το ζητούμενο.

(β) $M \frac{dM}{dt} = -c\eta L R \qquad c \equiv 4 \times 10^{13}$

άρα $\int_{M_0}^{M} M dM = -\int_0^t c\eta L R dt$ και προκύπτει

$M = (M_0^2 - 2c\eta L R t)^{1/2}$ (1)

(γ)



(δ) Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $t \simeq 369.000$yrs

7. $\Pi \simeq \sqrt{\dfrac{3\pi}{2\gamma G \bar{\rho}}}$ με $\gamma = 5/3$ και $\bar{\rho}_0 = 1410\, kg m^{-3}$

αντικαθιστούμε κι έχουμε :

$$\Pi = 5.48 \cdot 10^3 s \quad ή \quad 91{,}4\, min.$$

(Προσοχή στις σημειώσεις του μαθήματος υπάρχει τυπογραφικό είναι <u>1600sec</u> κ' όχι 1600days)

8. Μέση πυκνότητα : $3 \cdot 10^9\, kg m^{-3}$

Κεντρική θερμοκρασία : $3 \cdot 10^7\, K$

μέσο μοριακό βάρος : ~ 2

Ιδανική πίεση αερίου στο κέντρο του Σείριου Β:

$$P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \simeq 4.35 \cdot 10^{20} N m^{-2}$$

Πίεση ακτινοβολίας:

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4 \simeq 2 \cdot 10^{14}\, N m^{-2}$$

Αυτές οι τιμές είναι πολύ μικρότερες από την εκτιμώμενη κεντρική πίεση $3.8 \cdot 10^{22}\, N m^{-2}$ οπότε δεν μπορούν να υποστηρίξουν τον αστέρα.