



Φυσική των αστέρων

Μάθημα 2

α.ε. 2022-23

Ένταση (intensity) και ειδική ένταση (specific intensity) του φωτός

- **Ένταση**, I ($\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{sr}^{-1}$) είναι η ακτινοβολούμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και ανά μοναδιαία στερεά γωνία που περνά από στοιχειώδη επιφάνεια κάθετη στη κατεύθυνση της εκπομπής.
- **Ειδική ένταση**, I_λ ή I_ν ($\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{sr}^{-1}\text{cm}^{-1}$ ή $\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{sr}^{-1}\text{Hz}^{-1}$) είναι η ακτινοβολούμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου, ανά μοναδιαία στερεά γωνία και ανά μοναδιαίο εύρος μήκους κύματος ή συχνότητας, που περνά από στοιχειώδη επιφάνεια κάθετη στη κατεύθυνση της εκπομπής.

$$dE = I_\nu \cos \theta \, d\nu \, d\Omega \, dA \, dt$$

- **Σχέση έντασης - ροής**

$$df = I \cos \theta d\Omega \quad \text{και} \quad f_\nu = I_\nu \cos \theta d\Omega$$

Ακτινοβολία από όλες τις γωνίες – πυκνότητα ενέργειας (energy density) και μέση ένταση (mean intensity)

➤ Η πυκνότητα ενέργειας (energy density), u (erg cm^{-3}), είναι η ενέργεια ακτινοβολίας (radiative energy) ανά μονάδα όγκου $du = \frac{dE}{dV}$

➤ Η ειδική πυκνότητα ενέργειας (specific energy density) είναι η πυκνότητα ενέργειας ανά μοναδιαία περιοχή συχνότητας, u_ν , ή μήκους κύματος, u_λ και ορίζεται ως

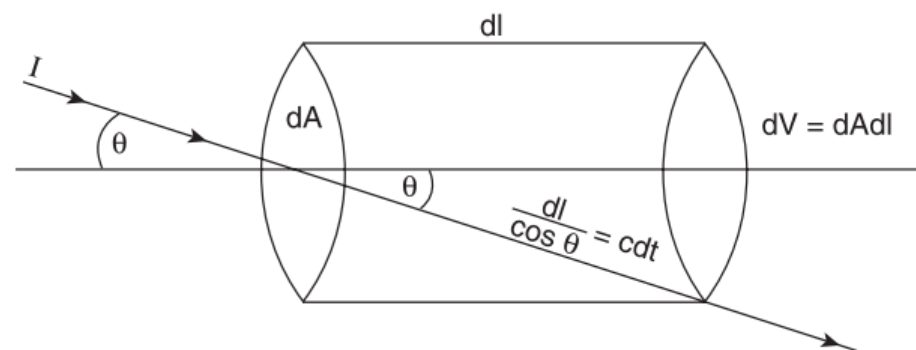
$$u = \int u_\nu d\nu = \int u_\lambda d\lambda$$

➤ Η πυκνότητα ενέργειας σχετίζεται με την ένταση ακτινοβολίας I ως εξής

$$u = \frac{1}{c} \int I d\Omega = \frac{4\pi}{c} J, \text{ όπου } J \text{ η μέση ένταση } J \equiv \frac{1}{4\pi} \int I d\Omega \text{ (για ισοτροπικό πεδίο } J = \frac{1}{4\pi} I \int d\Omega = I)$$

Απόδειξη $dE = I_\nu \cos \theta d\nu d\Omega dA dt$

$$\begin{aligned} du &= \frac{dE}{dV} = \frac{I_\nu \cos \theta d\nu d\Omega dA dt}{dA dl} = \frac{I_\nu d\nu d\Omega dA dl}{c dA dl} \\ &= \frac{I_\nu d\nu d\Omega}{c} \Rightarrow u = \frac{1}{c} \iint I_\nu d\nu d\Omega = \frac{1}{c} \int I d\Omega \end{aligned}$$



Σύγκριση J και I – σχόλια

- Η μέση ένταση προκύπτει από τη μέση τιμή της έντασης της ακτινοβολίας από όλες τις κατευθύνσεις.
- Για ένα ισοτροπικό πεδίο $J = I$
- Γενικά τα πεδία ακτινοβολίας δεν είναι ισοτροπικά, μερικά όμως είναι κατά προσέγγιση ισοτροπικά, όπως στα κέντρα των άστρων και η μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου (Cosmic Microwave Background radiation - 2.7K)
- Σε ένα ανισοτροπικό πεδίο ακτινοβολίας το J δεν είναι ανεξάρτητο της απόστασης, ενώ το I είναι.

Πως αντιλαμβανόμαστε τη ροή που φτάνει στη Γη – Φαινόμενο μέγεθος

$$m_\lambda - m_{\lambda_0} = -2.5 \log \left(\frac{f_\lambda}{f_{\lambda_0}} \right)$$

(διαφορά $\times 100 \rightarrow 5$ μεγέθη)

$$m_\nu - m_{\nu_0} = -2.5 \log \left(\frac{f_\nu}{f_{\nu_0}} \right)$$

όπου f_λ, f_ν οι πυκνότητες ροής. Μπορούν να αντικατασταθούν από τις αντίστοιχες ροές, αν πολ/σουμε αριθμητή και παρανομαστή επί το αντίστοιχο ισοδύναμο bandwidth

(ο δείκτης 0 αφορά στο μήκος κύματος αναφοράς)

(έξω από την ατμόσφαιρα της γης, ή διορθωμένα για την επίδρασή της)

$$\rightarrow \begin{aligned} m_\lambda &= -2.5 \log(f_\lambda) - 21.100 - ZP_\lambda \\ m_\nu &= -2.5 \log(f_\nu) - 48.598 - ZP_\nu \end{aligned}$$

Ιστορικά χρησιμοποιείται ως άστρο βαθμονόμησης ο Vega που θα θεωρηθεί ότι έχει μέγεθος 0 σε όλες τις μπαντες. Ή ο Σείριος...

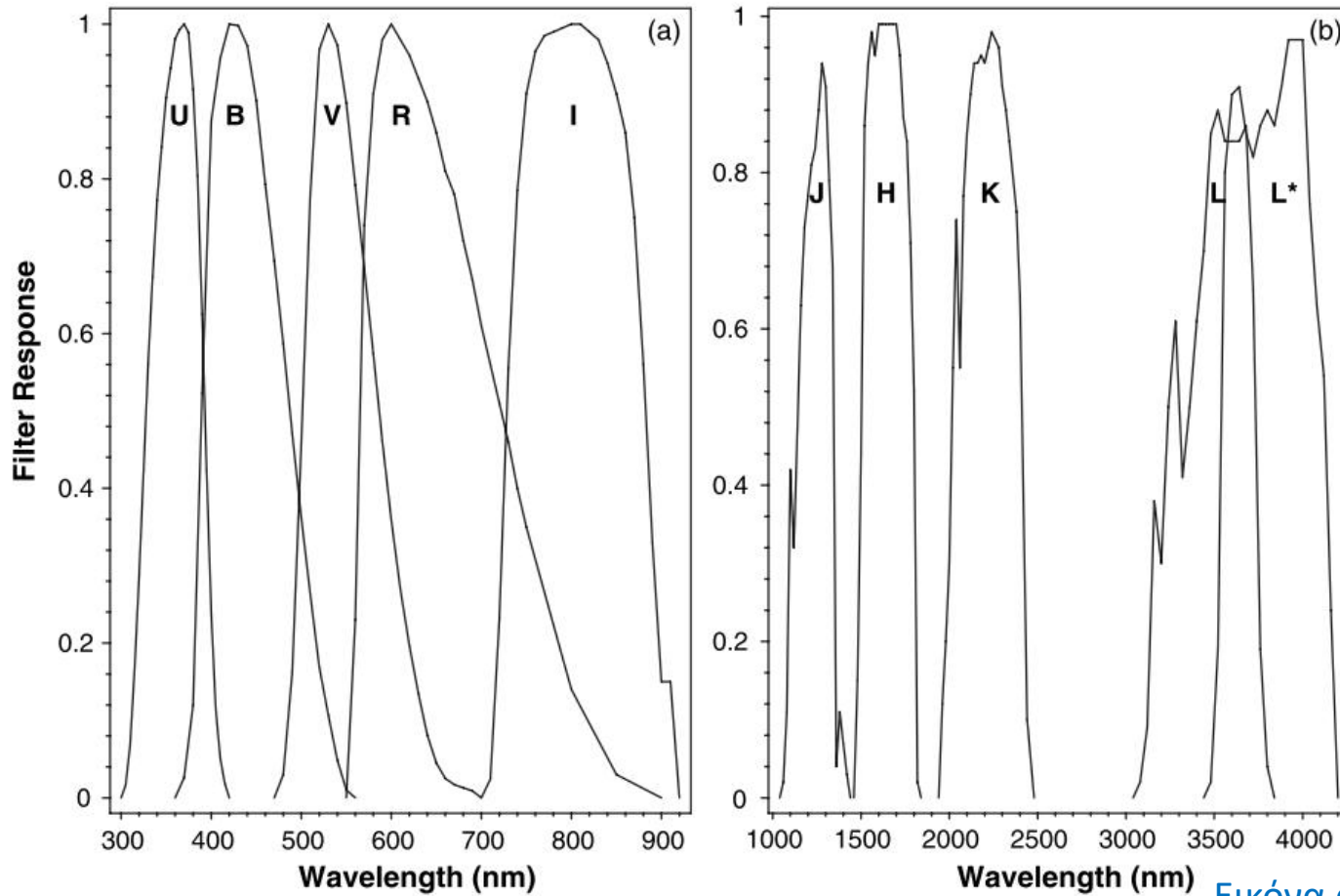
όπου

f_λ είναι σε μονάδες $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{\AA}^{-1}$

f_ν είναι σε μονάδες $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$

$ZP_{\lambda,\nu}$ είναι τα λεγόμενα “zero-points” (βλ. πίνακα στη διαφάνεια 7)

Φίλτρα στο οπτικό και το κοντινό υπέρυθρο



$$V - V_0 = -2.5 \log \left(\frac{f_V}{f_{V_0}} \right) \text{ κλπ}$$
$$B - B_0 = -2.5 \log \left(\frac{f_B}{f_{B_0}} \right)$$

Εικόνα από βιβλίο J. Irwin, *Astrophysics, Decoding the Cosmos*

Standard Φίλτρα και βαθμονόμηση μεγεθών

	U	B	V	R	I	J	H	K	L	L*
λ_{eff}^b	0.366	0.438	0.545	0.641	0.798	1.22	1.63	2.19	3.45	3.80
$\Delta\lambda^c$	0.065	0.098	0.085	0.156	0.154	0.206	0.298	0.396	0.495	0.588
$f_{\nu_0}^d$	1.790	4.063	3.636	3.064	2.416	1.589	1.021	0.640	0.285	0.238
$f_{\lambda_0}^e$	417.5	632	363.1	217.7	112.6	31.47	11.38	3.961	0.708	0.489
ZP_ν	0.770	-0.120	0.000	0.186	0.444	0.899	1.379	1.886	2.765	2.961
ZP_λ	-0.152	-0.601	0.000	0.555	1.271	2.655	3.760	4.906	6.775	7.177

^aUBVRIJHKL Cousins–Glass–Johnson system (Cousins et al. 1983). The table values are for a fictitious A0 star which has 0 magnitude in all bands. A star of flux density, f_ν in units of $10^{-20} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$ or f_λ in units of $10^{-11} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ \AA}^{-1}$, will have a magnitude, $m_\nu = -2.5 \log(f_\nu) - 48.598 - ZP_\nu$ or $m_\lambda = -2.5 \log(f_\lambda) - 21.100 - ZP_\lambda$, respectively. ^bThe effective wavelength, in μm , is defined by $\lambda_{\text{eff}} = [\int \lambda f(\lambda) R_W(\lambda) d\lambda] / [\int f(\lambda) R_W(\lambda) d\lambda]$, where $f(\lambda)$ is the flux of the star at wavelength, λ , and $R_W(\lambda)$ is the response function of the filter in band W (see previous slide) Thus, the effective wavelength varies with the spectrum of the star considered. ^cFull width at half-maximum (FWHM) of the filters in μm . ^dUnits of $10^{-20} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$. ^eUnits of $10^{-11} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ \AA}^{-1}$.

Παράδειγμα

Το άστρο Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος $B=1.95$. Βρείτε την αντίστοιχη πυκνότητα ροής σε μονάδες $\text{erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{\AA}^{-1}$.

$$B - B_0 = -2.5 \log \left(\frac{f_B}{f_{B_0}} \right)$$

Πίνακας διαφάνειας 7

$$B - B_0 = 1.95 - 0 = -2.5 \log \left(\frac{f_B}{632 \times 10^{-11}} \right) \Rightarrow f_B = 1.0 \times 10^{-9} \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{\AA}^{-1}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα αν χρησιμοποιήσετε την σχέση

$$B = 1.95 = -2.5 \log(f_B) - 21.100 + 0.601$$

Απόλυτο μέγεθος

$$m - M = -2.5 \log \left(\frac{f}{f_{10\text{pc}}} \right) = -5 + 5 \log \left(\frac{d}{\text{pc}} \right)$$

Distance modulus

Αποδείξεις στην Εισαγωγή στην Αστροφυσική

Απόλυτο μέγεθος σε ηλιακές μονάδες

$$M - M_{b\odot} = -2.5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right)$$

Δείκτης χρώματος (colour index)

$$B - V = -2.5 \log \left(\frac{f_B f_{V_0}}{f_V f_{B_0}} \right) = -2.5 \log \left(\frac{f_B}{f_V} \right) - (ZPP_B - ZP)$$

- Ο δείκτης χρώματος είναι ανεξάρτητος της απόστασης
- Θα δούμε ότι ο δείκτης χρώματος δείχνει τη θερμοκρασία ενός άστρου
- Χρειάζεται διόρθωση για τη μεσοαστρική ερυθρωση

Βολομετρική διόρθωση

(μεταξύ μίας μπάντας και όλου του φάσματος)

$$BC = m_{bol} - V = M_{bol} - M_V$$

- Υπάρχουν πίνακες που δίνουν τις βολομετρικές διορθώσεις για διαφορετικούς τύπους άστρων.

Εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας

- Καθώς η φωτεινή ακτινοβολία περνά μέσα από ένα μέσο, ενέργεια μπορεί να προστεθεί ή να αφαιρεθεί από αυτή μέσω διάφορων μηχανισμών
 - (i) εκπομπής (ii) απορρόφησης και (iii) σκεδασμού φωτονίων.
- Έστω λοιπόν αστροφυσικό αντικείμενο στο οποίο δρουν διάφοροι τέτοιοι μηχανισμοί. Ποιο είναι το I_ν που δημιουργείται στο αντικείμενο αυτό;
- Η απάντηση δίνεται από τη λεγόμενη **Εξίσωση Διάδοσης Ακτινοβολίας (Ε.Δ.Α.)**

1^η περίπτωση – Ελεύθερος Χώρος

- Εύκολα αποδεικνύεται ότι στον **ελεύθερο χώρο** (όπου δεν υπάρχει εκπομπή απορρόφηση ή σκεδασμός), το I_ν παραμένει σταθερό.

Αν θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες μήκος διαδρομής ds , η αντίστοιχη μεταβολή της (εδώ ειδικής) έντασης είναι dI_ν . Στον ελεύθερο χώρο, προφανώς

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0 \Rightarrow I_\nu = \text{const} \quad (1)$$

2^η περίπτωση – Εκπομπή (emission)

➤ Ορίζουμε τον συντελεστή εκπομπής j_ν ως εξής

$$dE = j_\nu dV dt d\nu d\Omega$$

με μονάδες $erg\ cm^{-3}\ s^{-1}\ Hz^{-1}\ sterad^{-1}$

➤ Η αντίστοιχη διάδοση ακτινοβολίας θα είναι $\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu$ (2)

(θυμηθείτε ότι μονάδες για το I_ν είναι $ergs^{-1}\ cm^{-2}\ sr^{-1}\ Hz^{-1}$)

Ολοκληρώνοντας την (2) παίρνουμε $I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^s j_\nu(s') ds'$ (3)

Ειδική περίπτωση όταν το j_ν είναι ανεξάρτητο του s , $s_0 = 0$ και $I_\nu(0) = 0$

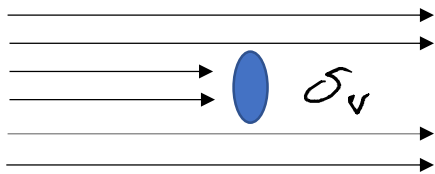
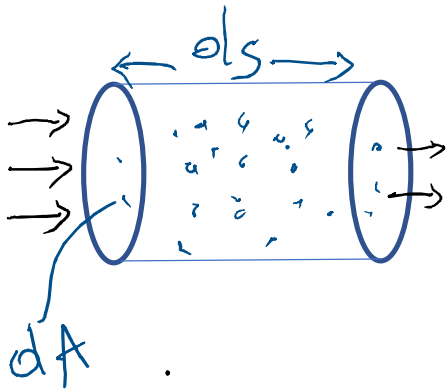
(3) $\Rightarrow I_\nu(s) = j_\nu s$, δηλ. η ειδική ένταση αυξάνεται γραμμικά όσο η δέσμη διασχίζει τη πηγή.

3^η περίπτωση – Απορρόφηση (absorption)

➤ Ορίζουμε τον συντελεστή απορρόφησης α_ν ως εξής

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu(s) ds \quad (4)$$

με μονάδες cm^{-1}



n = αριθμητική πυκνότητα απορροφητών με ενεργό διατομή (cross section) σ_ν

Ο συνολικός αριθμός απορροφητών σε όγκο $dV = dA ds$ θα είναι ίσος με $n dA ds$

Η ολική «ενεργός επιφάνεια» των απορροφητών είναι $n \sigma_\nu dA ds$

· Η ενέργεια που απορροφάται από τη δέσμη είναι (θυμηθείτε ότι $dE = I_\nu \cos \theta dv d\Omega dA dt$, όπου εδώ $\cos \theta = 1$)

$$-dI_\nu dv d\Omega dA dt = I_\nu n \sigma_\nu dA ds dv d\Omega dt \Rightarrow$$

$$dI_\nu = -n \sigma_\nu I_\nu ds \quad (5)$$

$$(4), (5) \rightarrow \alpha_\nu = n \sigma_\nu \quad (6)$$

➤ Επίσης μερικές φορές χρησιμοποιείται ο συντελεστής απορρόφησης μάζας k_ν (cm^2/g), που ορίζεται από τη σχέση $\alpha_\nu = \rho k_\nu$

➤ Η αντίστοιχη Ε.Δ.Α. γράφεται $\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu \Rightarrow$

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp \left[- \int_{s_0}^s a_\nu(s') ds' \right] = I_\nu(s_0) e^{-\tau_\nu(s)} \quad (7)$$

οπτικό βάθος (optical depth) $\tau_\nu(s) = \int_{s_0}^s a_\nu(s') ds' \quad (8)$

➤ Ειδική περίπτωση που το α_ν είναι ανεξάρτητο του s

$$(d\tau_\nu = a_\nu ds)$$

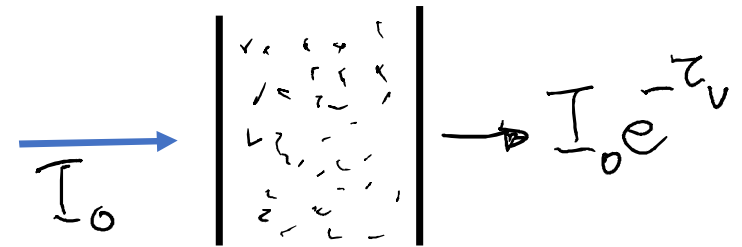
$$\tau_\nu = \int_{s_0}^s a_\nu(s') ds' = a_\nu (s - s_0) = a_\nu R = n\sigma_\nu R \quad (9)$$

R

$$\langle \tau_\nu \rangle \equiv \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1$$

$\tau_\nu > 1$ αδιαφανές μέσο

$\tau_\nu < 1$ διαφανές μέσο

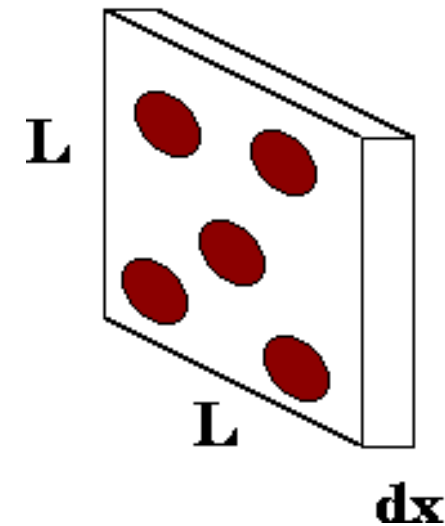


➤ Μέση ελεύθερη διαδρομή $\bar{l}_v \equiv \frac{1}{n\sigma_v} = \frac{1}{\alpha_v}$ (10)

• *probability* \mathcal{P} (stopping within dx) = $\frac{\text{Area atoms}}{\text{Area slab}} = \frac{\sigma n L^2 dx}{L^2} = n\sigma dx$

• $dI = \mathcal{P}I = -In \sigma dx$

• $\frac{dI}{dx} = -In \sigma \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{I}{\ell}$



4^η περίπτωση – Εκπομπή και Απορρόφηση

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{\alpha_\nu ds} = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} - I_\nu \Rightarrow \boxed{\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu} \quad (11)$$

όπου $S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$ η **συνάρτηση πηγής**.

Πολ/ζουμε την (11) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{τ_ν} και ορίζουμε δύο νέες συναρτήσεις

$$\mathcal{J} = I_\nu e^{\tau_\nu} \text{ και } \mathcal{S} = S_\nu e^{\tau_\nu} \quad (12)$$

οπότε η (11) γίνεται

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\tau_\nu} = \mathcal{S} \text{ που έχει λύση } \mathcal{J}(\tau_\nu) = \mathcal{J}(0) + \int_0^{\tau_\nu} \mathcal{S}(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \quad (13)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (12) στη (13) παίρνουμε

τη γενική λύση της (11)

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \quad (14)$$

ευθετική μείωση
των φκτικής έντασης
λόγω απορρόφησης

η ομαλοποιημένη πηγή (μεωμένη
λόγω απορρόφησης)

Ειδική περίπτωση 1:

$S_\nu = \text{σταθ}$ (ανεξάρτητο του τ_ν)

$$\frac{dI_\nu}{S_\nu - I_\nu} = d\tau_\nu \Rightarrow \int \frac{dI_\nu}{S_\nu - I_\nu} = \int d\tau'_\nu \Rightarrow \ln |S_\nu - I_\nu| = -\tau_\nu + c' \Rightarrow$$

$$S_\nu - I_\nu = c e^{-\tau_\nu}$$

Για $\tau_\nu = 0, I_\nu = I_\nu(0)$, οπότε $S_\nu - I_\nu(0) = c$ και $S_\nu - I_\nu = (S_\nu - I_\nu(0)) e^{-\tau_\nu} \Rightarrow$

$$I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu + e^{-\tau_\nu}(I_\nu(0) - S_\nu)$$

(α) αν $I_\nu(0) = 0$, δηλ. δεν έχω καθόλου αρχική δέσμη, τότε όλα τα φωτόνια παράγονται μέσα στο μέσο και $I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$

Έστω επιπλέον ότι το τ_ν είναι πάρα πολύ μικρό.

Τότε κάνω ανάπτυγμα Taylor ως προς τ_ν και έχω $I_\nu(\tau_\nu) \approx S_\nu(1 - 1 + \tau_\nu + \dots) = S_\nu \tau_\nu$

Αλλά $S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$ και $\tau_\nu \approx \alpha_\nu L$ δηλ. $I_\nu(\tau_\nu) \approx j_\nu L$

(β) αν $\tau_\nu \rightarrow \infty, I_\nu \rightarrow S_\nu$ δηλ. η ειδική ένταση ακτινοβολίας τείνει να ταυτιστεί με τη συνάρτηση πηγής, ή αλλιώς τη συνάρτηση πηγής θα τη παρατηρήσω απευθείας μόνο αν το οπτικό βάθος είναι πολύ μεγάλο.

Σχόλια

$$\text{Ε. Δ. Α.} \quad \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu$$

Παρατηρούμε ότι όταν το $I_\nu > S_\nu$ το $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu}$ είναι <0 και το I_ν μειώνεται κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης

Αν αντίθετα $I_\nu < S_\nu$ το $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu}$ είναι >0 και το I_ν αυξάνεται κατά μήκος της διαδρομής.

Έτσι η συνάρτηση πηγής είναι η ποσότητα που η ειδική ένταση «προσπαθεί να πλησιάσει», κάτι που το καταφέρνει σε κάποιο επαρκές οπτικό βάθος. [Είδαμε ότι στη περίπτωση που η συναρτηση πηγης είναι σταθερή, αυτό συμβαίνει στο άπειρο.]

Με αυτό το σκεπτικό, μπορούμε να πούμε ότι η Ε.Δ.Α. εκφράζει μία relaxation process.

Δεν έχουμε ακόμα λάβει υπόψη μας τη σκέδαση στην Ε.Δ.Α. Θα το κάνουμε αργότερα.

Επίσης στην απορρόφηση μπορούμε να συμπεριλάβουμε και την εξαναγκασμένη εκπομπή (με αντίθετο βέβαιο πρόσημο) αφού και οι δύο εξαρτώνται από την ένταση της εισερχόμενης δέσμης

Θερμική ακτινοβολία

- Θερμική ακτινοβολία είναι η ακτινοβολία που εκπέμπεται από ύλη σε θερμοδυναμική ισορροπία.
- Τα j_ν και α_ν και αν δεν είναι οποιαδήποτε όταν έχω θερμοδυναμική ισορροπία, αλλά ικανοποιούν τον νόμο του *Kirchhoff*

$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T)$ (14) ή $S_\nu = B_\nu(T)$, όπου B_ν η συνάρτηση Planck

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}, \text{ ή, } B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\left(\frac{hc}{\lambda T}-1\right)} \rightarrow B_\nu d\nu = B_\lambda d\lambda$$

➤ Η Ε.Δ.Α. γίνεται

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \alpha_\nu B_\nu(T) \text{ ή } \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T)$$

Αν το $\tau \gg 1$ τότε είδαμε ότι $I_\nu \approx S_\nu = B_\nu(T)$

(δηλ. σε αυτή την περίπτωση η ειδική ένταση περιγράφεται από την συνάρτηση Planck \rightarrow BB)

Αν το τ δεν είναι πολύ μεγάλο, αλλά έχω πάλι Θ.Ι., τότε $I_\nu(\tau_\nu) \approx B_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$
(για $I_\nu(0)=0$)

Blackbody radiation $I_\nu = B_\nu$
Thermal radiation $S_\nu = B_\nu$