Φυσική των αστέρων
Μάθημα 4

α.ε. 2022-23

Εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας – Σκέδαση – τυχαίος βηματισμός

Στη περίπτωση της ακραιφνούς θερμικής εκπομπής, το ποσό της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από ένα στοιχειώδες τμήμα του υλικού δεν εξαρτάται από το προσπίπτον πεδίο ακτινοβολίας και η συνάρτηση πηγής είναι πάντα ίση με $B_\nu(T)$, εξαρτώμενη μόνο από τη θερμοκρασία T. Ένα τέτοιο στοιχείο θα εκπέμπει το ίδιο είτε είναι στον κενό χώρο είτε π.χ. στο εσωτερικό ενός άστρου, όπου υπάρχει σημαντική διάχυτη ακτινοβολία. Αυτό το χαρακτηριστικό διευκολύνει τους υπολογισμούς και την επίλυση της Ε.Δ.Α.

Μία άλλη πολύ συνηθισμένη διαδικασία εκπομπής είναι η **σκέδαση** (π.χ. σκέδαση από ηλεκτρόνια). Σε αυτή τη περίπτωση, η εκπομπή εξαρτάται απόλυτα από τη προσπίπτουσα ακτινοβολία, και η επίλυση της Ε.Δ.Α. είναι δύσκολη.

Στα επόμενα θα κάνουμε την απλή υπόθεση ότι η σκέδαση είναι ίδια προς όλες τις διευθύνσεις, δηλ. ισοτροπική, και ότι είναι ελαστική, δηλ., δεν αλλάζει η ενέργεια (συχνότητα) του φωτονίου κατά τη σκέδαση.

Η εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας για ισοτροπική ελαστική σκέδαση

- Ο συντελεστής εκπομπής για ισοτροπική ελαστική σκέδαση βρίσκεται πολύ εύκολα αν εξισώσουμε την ισχύ που απορροφάται ανά μονάδα όγκου και περιοχή συχνοτήτων με την αντίστοιχη ισχύ που εκπέμπεται. Δηλ.
- $j_\nu = \sigma_\nu J_\nu$ (1) όπου, όπως έχουμε δει, $J_\nu \equiv \frac{1}{4\pi}\int I_\nu d\Omega$ (2)

  και σ_ν είναι ο συντελεστής σκέδασης.

- Η συνάρτηση πηγής θα είναι εξ ορισμού $S_\nu = \frac{j_\nu}{\sigma_\nu}$ (3) που ισούται από τη σχέση (1) με J_ν.

  Άρα $\boldsymbol{S_\nu = J_\nu}$ (4)

- Η Ε.Δ.Α. αν έχουμε μόνο σκέδαση γράφεται $\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \sigma_\nu I_\nu \underset{(1)}{\Longrightarrow}$

  $\frac{dI_\nu}{ds} = \sigma_\nu J_\nu - \sigma_\nu I_\nu = \sigma_\nu(J_\nu - I_\nu) \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dI_\nu}{ds} = -\sigma_\nu(I_\nu - J_\nu)}$ (5)

Η εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας για ισοτροπική ελαστική σκέδαση

- Η Ε.Δ.Α. $\frac{dI_\nu}{ds} = -\sigma_\nu(I_\nu - J_\nu)$ δεν μπορεί να επιλυθεί εύκολα σε αυτή τη μορφή, εφόσον η συνάρτηση πηγής $S_\nu = J_\nu$ εξαρτάται από τη λύση I_ν σε όλες τις κατευθύνσεις που περνάνε από ένα συγκεκριμένο σημείο. Πρόκειται δηλ. για μια ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση (integrodifferential equation)

- Ένας ιδιαίτερα χρήσιμος τρόπος μελέτης της σκέδαση, που οδηγεί σε σημαντικά προσεγγιστικά αποτελέσματα , είναι **ο «τυχαίος βηματισμός»**

- Ας θεωρήσουμε ένα φωτόνιο που εκπέμπεται σε ένα άπειρο ομογενές μέσο σκέδασης. Ταξιδεύει κατά $\vec{r_1}$ μέχρι να σκεδαστεί, μετά ΄μετακινείται κατά $\vec{r_2}$ μέχρι την επόμενη σκέδαση κ.ο.κ. Η συνισταμένη μετατόπιση του φωτονίου είναι

  $$\vec{R} = \vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3} + \cdots + \vec{r_N}$$

- Θέλουμε να βρούμε μια χοντρική προσέγγιση για την απόσταση $|\vec{R}|$ που διανύει ένα τυπικό φωτόνιο. Υπολογίζουμε τη μέση τιμή του τετραγώνου του $\vec{R}$ σε όλες τις δυνατές κατευθύνσεις.

$$l_*^2 \equiv \langle \mathbf{R}^2 \rangle = \langle \mathbf{r}_1^2 \rangle + \langle \mathbf{r}_2^2 \rangle + \cdots \langle \mathbf{r}_N^2 \rangle$$
$$+2\langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \rangle + 2\langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 \rangle + \cdots$$
$$+ \cdots .$$

Η εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας για ισοτροπική ελαστική σκέδαση

$$
\begin{aligned}
l_*^2 \equiv \langle \mathbf{R}^2 \rangle = \langle \mathbf{r}_1^2 \rangle + \langle \mathbf{r}_2^2 \rangle + \cdots \langle \mathbf{r}_N^2 \rangle \\
+2\langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \rangle + 2\langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 \rangle + \cdots \\
+ \cdots .
\end{aligned}
$$

- Κάθε ένας από τους όρους $\langle \mathbf{r}_i^2 \rangle$ αντιστοιχεί στην ουσία στο τετράγωνο της μέσης ελεύθερης διαδρομής, l^2.
- Οι όροι $\langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{j \neq i} \rangle$ περιλαμβάνουν τη μέση τιμή cosθ (της γωνίας μεταξύ των δύο κατευθύνσεων του φωτονίου πριν και μετά τη σκέδαση), που ισούται με 0 για ισοτροπική σκέδαση (ή και για οποιαδήποτε σκέδαση όπως η Thomson και η Rayleigh που έχουν συμμετρία εμπρός-πίσω.
- Επομένως

$l_*^2 = N\, l^2$ και $l_* = \sqrt{\mathrm{N}} l$ → root mean square net displacement of the photon

- Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμήσουμε τον μέσο αριθμό των σκεδάσεων στις οποίες υπόκειται ένα φωτόνιο μέσα σε ένα πεπερασμένο μέσο.

- Ας υποθέσουμε ότι ένα φωτόνιο εκπέμπεται σε κάπιοιο σημείο του μέσου, και στη συνέχεια σκεδάζεται μέχρι να διαφύγει από το μέσο.
- Σε περιοχές με μεγάλο οπτικό βάθος, ο αριθμός σκεδάσεων που απαιτείται για να επιτευχθεί αυτό (δηλ. να φύγει το φωτόνιο από το μέσο) προκύπτει αν θέσουμε $l_* \sim L$, όπου L το τυπικό μέγεθος του μέσου.
- $l_* = \sqrt{\mathrm{N}}l \approx \mathrm{L} \Rightarrow N \approx {}^{L^2}/_{l^2}$
- Αφού το l είναι της τάξης της μέσης ελεύθερης διαδρομής, ο λόγος L/l θα είναι της τάξης του μέσου οπτικού βάθους στο μέσο.

  Άρα $N \approx \tau^2, (\tau \gg 1)$
- Για περιοχές με μικρό οπτικό βάθος, ο μέσος αριθμός σκεδάσεων είναι μικρός και είναι της τάξης του $1 - e^{-\tau} \approx \tau$ επομένως ο μέσος αριθμός σκεδάσεων θα είναι σε αυτή την περίπτωση :

  $N \approx \tau, (\tau \ll 1)$
- Για τους περισσότερους υπολογισμούς «τάξης μεγέθους» αρκεί να θέσουμε $N \approx \tau^2 + \tau,$ ή $N \approx max(\tau, \tau^2)$

Εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας για σκέδαση και απορρόφηση

- Η εκπομπή και απορρόφηση ακτινοβολίας μπορεί να καθορίζονται από περισσότερες από μια διεργασίες.
- Ως παράδειγμα θεωρούμε την περίπτωση ενός υλικού με συντελεστή απορρόφησης α_ν που περιγράφει την απορρόφηση που έχουμε σε ένα μέσο που εκπέμπει θερμικά, και με συντελεστή σκέδασης σ_ν για ισοτροπική ελαστική σκέδαση.
- Τότε η Ε.Δ.Α. έχει δύο όρους στο 2^{ο} μέλος:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu(I_\nu - B_\nu) - \sigma_\nu(I_\nu - J_\nu) \Rightarrow$$

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -I_\nu(\alpha_\nu + \sigma_\nu) + \alpha_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu$$

απορρόφηση εκπομπή

- Από τον ορισμό της συνάρτησης πηγής $S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$ θα έχω

$$S_\nu = \frac{\alpha_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu}$$

- Η συνάρτηση πηγής $S_\nu = \frac{\alpha_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu}$ (*) είναι στην ουσία μία μέση τιμή δυο διακριτών συναρτήσεων πηγής, με συντελεστή βαρύτητας τον αντίστοιχο συντελεστή απορρόφησης.

- Ο συνολικός συντελεστής απορρόφησης $\alpha_\nu + \sigma_\nu$ (extinction coefficient) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσει το οπτικό βάθος:

  $d\tau_\nu = (\alpha_\nu + \sigma_\nu)ds$

- Ας θεωρήσουμε μία στοιχείο ύλης βαθιά στο εσωτερικό ενός μέσου σταθερής θερμοκρασίας. Υποθέτουμε ότι το πεδίο ακτινοβολίας θα είναι κοντά στη θερμοδυναμική τιμή του, δηλ. $J_\nu = B_\nu(\tau)$

  Από την (*) προκύπτει ότι $S_\nu = B_\nu$ (θερμοδυναμική ισορροπία)

- Αν το στοιχείο αυτό είναι σε ελεύθερο χώρο τότε

  $J_\nu \approx 0$ και $S_\nu = \frac{\alpha_\nu B_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu}$,

δηλ. η συνάρτηση πηγής είναι μόνο ένα ποσοστό της συνάρτησης Planck

- Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια του τυχαίου βηματισμού και στη περίπτωση που έχουμε σκέδαση και απορρόφηση.
- Η ελεύθερη διαδρομή του φωτονίου μέχρι να σκεδαστεί ή να απορροφηθεί θα είναι

$$l_\nu = (\alpha_\nu + \sigma_\nu)^{-1}$$

- Κατά τον τυχαίο βηματισμό, η πιθανότητα ότι η ελεύθερη διαδρομή θα λήξει με απορρόφηση είναι $\epsilon_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu+\sigma_\nu}$

  και η αντίστοιχη πιθανότητα για σκέδαση είναι $1 - \epsilon_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\alpha_\nu+\sigma_\nu}$
- Με αυτούς τους ορισμούς, η συνάρτηση πηγής γράφεται

$$S_\nu = (1 - \epsilon_\nu)J_\nu + \epsilon_\nu B_\nu$$

- Σε ένα άπειρο και ομογενές μέσο, η πιθανότητα να απορροφηθεί (να καταστραφεί) το φωτόνιο στο τέλος μίας ελεύθερης διαδρομής είναι ϵ, οπότε $\mathrm{N} = 1/\epsilon$.
- $l_* = \frac{l}{\sqrt{\epsilon}} = (\alpha_\nu + \sigma_\nu)^{-1} / \left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu+\sigma_\nu}\right)^{1/2} \Rightarrow l_* \approx [\alpha_\nu(\alpha_\nu + \sigma_\nu)]^{-1/2}$
- Αυτό το μήκος είναι ένα μέτρο της μετατόπισης μεταξύ της δημιουργίας και καταστροφής ενός τυπικού φωτονίου και ονομάζεται συχνά μήκος διάχυσης, ή ενεργή ελεύθερη διαδρομή

- Σε ένα πεπερασμένο μέσο, η συμπεριφορά εξαρτάται από το αν το χαρακτηριστικό μέγεθος του μέσου, L, είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από την ενεργή ελεύθερη διαδρομή.

- Χρησιμοποιούμε λοιπόν το ενεργό οπτικό βάθος $\tau_* = L/l_*$

  Οπότε από την $l_* \approx [\alpha_\nu(\alpha_\nu + \sigma_\nu)]^{-1/2}$ προκύπτει εύκολα ότι

  $\tau_* \approx \sqrt{\tau_a(\tau_a + \tau_s)}$ όπου $\tau_a = \alpha_\nu L$ και $\tau_s = \sigma_\nu L$

- Όταν η ενεργή ελεύθερη διαδρομή είναι πολύ μεγαλύτερη από το L τότε το ενεργό οπτικό βάθος είναι <<1 και τα περισσότερα φωτόνια δραπετεύουν χωρίς να απορροφηθούν. → effectively thin medium

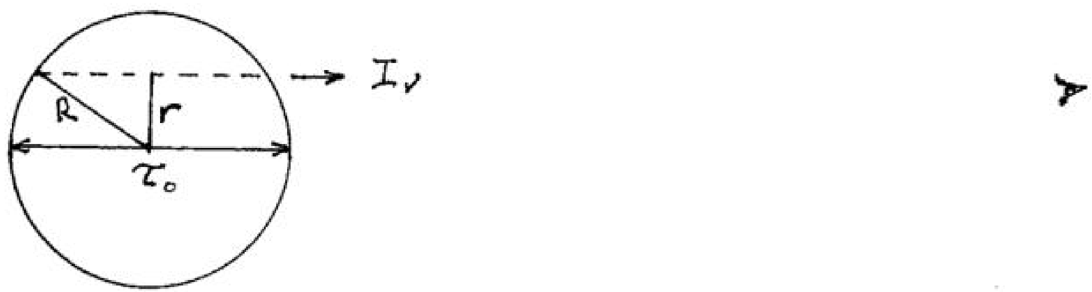
- Στην αντίθετη περίπτωση, δηλ. όταν το ενεργό οπτικό βάθος είναι >>1, το μέσο λέγεται effectively thick medium

- Τα περισσότερα φωτόνια που εκπέμπονται σε βάθη μεγαλύτερα από το l_*, θα καταστραφούν πριν δραπετεύσουν από το μέσο. Άρα σε μεγάλα (ενεργά) βάθη, οι συνθήκες πλησιάζουν την θερμοδυναμική ισορροπία μεταξύ ύλης και ακτινοβολίας, οπότε

  $I_\nu \to B_\nu$ *και* $S_\nu \to B_\nu$

Άσκηση 1

Υποθέστε ότι έχετε ένα σφαιρικό νέφος με ακτίνα R το οποίο εκπέμπει ισοτροπικά και χαρακτηρίζεται από μία ομογενή συνάρτηση πηγής S_ν.
(α) Αν το οπτικό βάθος τ πάνω στη διάμετρο της σφαίρας ισούται με 1, υπολογίστε την ειδική ένταση ακτινοβολίας ως συνάρτηση της απόστασης r, όπως θα τη μέτραγε ένας ανιχνευτής ο οποίος βρίσκεται σε απόσταση D από την πηγή. Απεικονίστε γραφικά την ειδική ένταση ακτινοβολίας συναρτήσει του r.
(β) Επαναλάβετε το ερώτημα (α) για $\tau = 10$.



Σχήμα 1: Η πηγή της Άσκησης 1.

Ισοτροπική και ομοιογενής εκπομπή → S_ν, a_ν, j_ν σταθερά.

Για το οπτικό βάθος έχουμε ότι

$\tau_\nu = a_\nu ds \Rightarrow \tau_\nu = \int_0^s a_\nu ds = a_\nu$s (1) (αφού a_ν σταθερό).

Στην επιφάνεια τ = 1, άρα 1 = a_ν2R (2R η διάμετρος) → $a_\nu = \frac{1}{2R}$ (2)

Εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας:

$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu \Rightarrow I(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + e^{-\tau_\nu}\int_0^{\tau_\nu} e^{\tau'_\nu} S_\nu d\tau'_\nu$ (3)

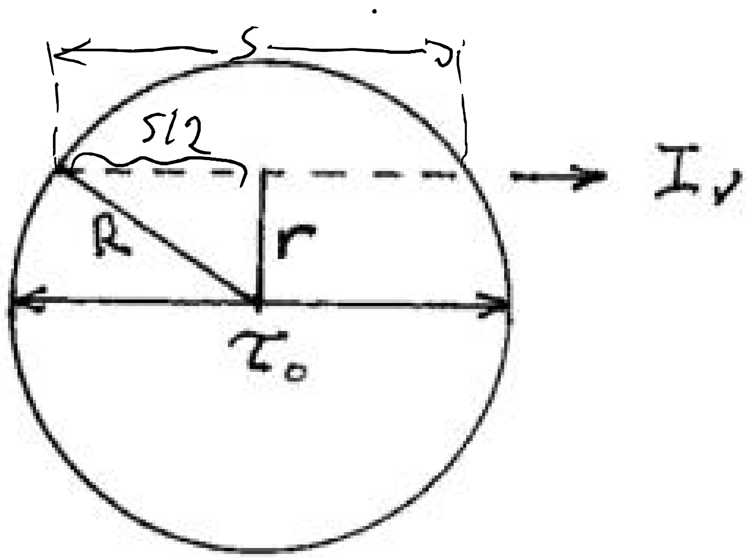
Υποθέτουμε ότι $I_\nu(0)=0$ (4), οπότε

$I_\nu(\tau_\nu) = e^{-\tau_\nu}\int_0^{\tau_\nu} e^{\tau'_\nu} S_\nu d\tau'_\nu = S_\nu e^{-\tau_\nu}\int_0^{\tau_\nu} e^{\tau'_\nu} d\tau'_\nu = S_\nu e^{-\tau_\nu}\left(e^{\tau_\nu} - 1\right) =$
$S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$

Δηλ. $I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$ (4)

Αλλά $\tau_\nu = a_\nu s$ (5)

Οπότε από (4), (5) $I_\nu = S_\nu(1 - e^{-a_\nu s}) \underset{(2)}{\Longrightarrow} I_\nu = S_\nu\left(1 - e^{-s/2\mathrm{R}}\right)$ (6)



$R^2 = r^2 + \frac{s^2}{4} \Rightarrow s = 2(R^2 - r^2)^{1/2} = 2R[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2]^{1/2}$
(7)

Άρα $I_\nu = S_\nu\left(1 - e^{-s/2\mathrm{R}}\right) \Rightarrow$

$I_\nu = S_\nu\left(1 - e^{-\frac{1}{2R}2R[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2]^{1/2}}\right) \Rightarrow$

$I_\nu = S_\nu\left[1 - e^{-[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2]^{1/2}}\right]$

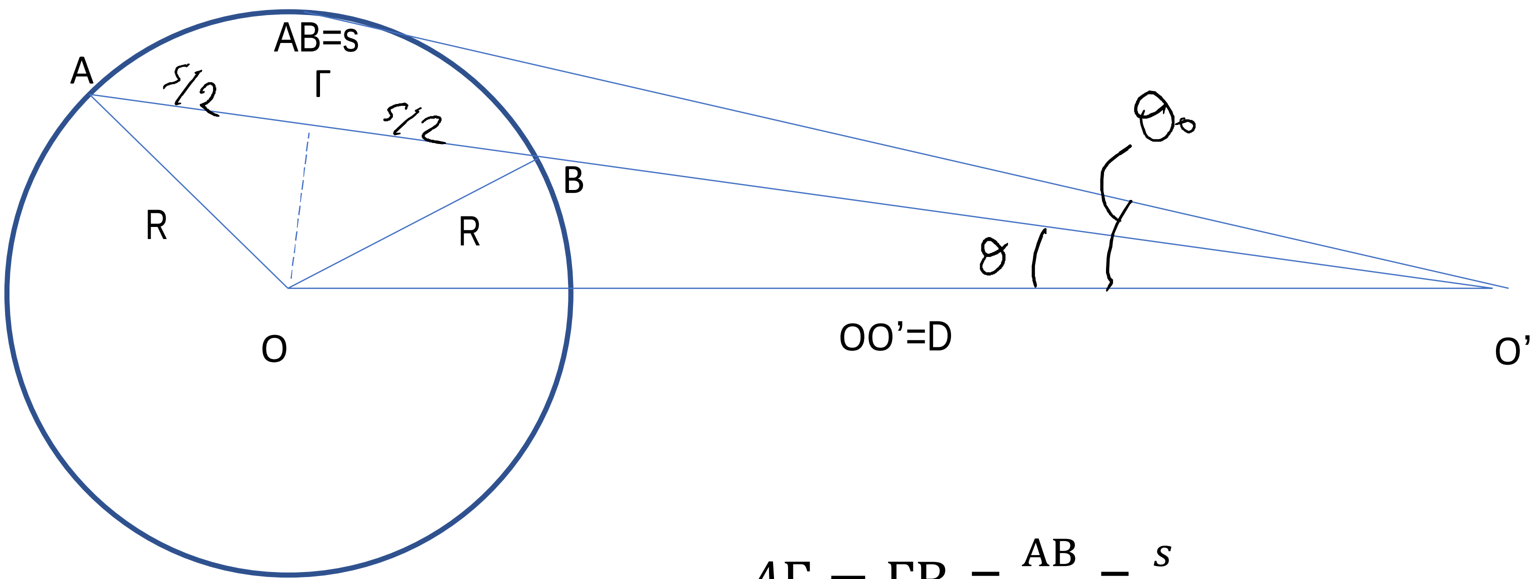
Για $\tau = 10$, $a_\nu = \frac{10}{2R}$ και $I_\nu = S_\nu\left[1 - e^{-10[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2]^{1/2}}\right]$

Δηλ. $I_\nu \approx S_\nu$

Άσκηση 4

Θεωρούμε σφαιρική πηγή τα σωμάτια της οποίας εκπέμπουν με συντελεστή εκπομπής j_ν^* (μονάδες: ενέργεια/χρόνος/συχνότητα). Η πηγή απέχει απόσταση D από τη Γη, έχει ακτίνα R και τα σωμάτια αυτής έχουν πυκνότητα n.
Θεωρώντας ότι η πηγή είναι οπτικά διαφανής και ομογενής να υπολογίσετε την ειδική ένταση ακτινοβολίας I_ν ως συνάρτηση της γωνίας θ (η γωνία $\theta = 0$ αντιστοιχεί στην ευθεία Γη-κέντρο της πηγής).
Ποια είναι η ροή ακτινοβολίας και η ολική λαμπρότητα της πηγής;

- ,



$$A\Gamma = \Gamma B = \frac{AB}{2} = \frac{s}{2}$$

$$\frac{s}{2} = \sqrt{R^{2-}D^2 sin^2\theta} \Rightarrow s = 2\sqrt{R^{2-}D^2 sin^2\theta}$$

$$sin\theta_o = R/D$$

(α) Από την διατύπωση της άσκησης καταλαβαίνουμε ότι ο συντελεστής εκπομπής δίνεται ανά σωμάτιο, άρα στη θέση του j_ν θέτουμε nj_ν^*.

$$\frac{dI_\nu}{ds} = nj_\nu^* - a_\nu I_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{j_\nu - a_\nu I_\nu} = ds \Rightarrow \frac{d(\frac{nj_\nu^*}{\alpha_\nu} - I_\nu)}{\frac{nj_\nu^*}{\alpha_\nu} - I_\nu} = -\alpha_\nu ds$$

$$\Rightarrow \frac{nj_\nu^*}{\alpha_\nu} - I_\nu = ce^{-\alpha_\nu s}$$

Αν $I_\nu(0) = 0$ τότε $c = \frac{nj_\nu^*}{\alpha_\nu}$, άρα

$$I_\nu = \frac{nj_\nu^*}{\alpha_\nu}(1 - e^{-\alpha_\nu s})$$

Αλλά $s = 2\sqrt{R^{2-}D^2 sin^2\theta} \Rightarrow s = 2D\sqrt{sin^2\theta_o - sin^2\theta}$

Οπότε

$$I_\nu = \frac{nj_\nu^*}{\alpha_\nu}\left[1 - e^{-2\alpha_\nu D\left(sin^2\theta_o - sin^2\theta\right)^{1/2}}\right]$$

((β) $F_\nu = \int_{\Delta\Omega} I_\nu \cos\theta d\Omega$

$d\Omega = sin\theta d\theta d\varphi$

Άρα $F_\nu = \int_{\Delta\Omega} I_\nu \cos\theta d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_o} \frac{n j_\nu^*}{\alpha_\nu}\left[1 - e^{-2\alpha_\nu D\left(sin^2\theta_o - sin^2\theta\right)^{1/2}}\right]\cos\theta sin\theta d\theta d\varphi \Rightarrow F_\nu =$

$2\pi \int_0^{\theta_o} \frac{n j_\nu^*}{\alpha_\nu}\left[1 - e^{-2\alpha_\nu D\left(sin^2\theta_o - sin^2\theta\right)^{1/2}}\right]\cos\theta sin\theta d\theta$

Αυτό το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί εύκολα στην περίπτωση που η ποσότητα $\alpha_\nu D(sin^2\theta_o - sin^2\theta)^{1/2} \ll 1$.

Για αυτή τη περίπτωση $e^{-2\alpha_\nu D\left(sin^2\theta_o - sin^2\theta\right)^{1/2}} \cong 1 - 2\alpha_\nu D(sin^2\theta_o - sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} + \cdots$

οπότε $F_\nu = 2\pi \int_0^{\theta_o} \frac{n j_\nu^*}{\alpha_\nu}\left[2\alpha_\nu D(sin^2\theta_o - sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\right]\cos\theta sin\theta d\theta \Rightarrow$

$F_\nu = 2\pi \int_0^{sin^2\theta_o} n j_\nu^* \left[D(sin^2\theta_o - sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\right] d sin^2\theta \Rightarrow$

$$F_\nu = 2\pi n j_\nu^* D \int_0^{sin^2\theta_o} \left[(sin^2\theta_o - sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\right] d sin^2\theta = \frac{4\pi}{3} n j_\nu^* D sin^3\theta_o = \frac{4\pi}{3} j_\nu^* D n \left(\frac{R}{D}\right)^3 = \frac{n j_\nu^* V}{D^2} = \frac{N j_\nu^*}{D^2}$$

όπου $V = \frac{4\pi}{3} R^3$, και $N = nV$