



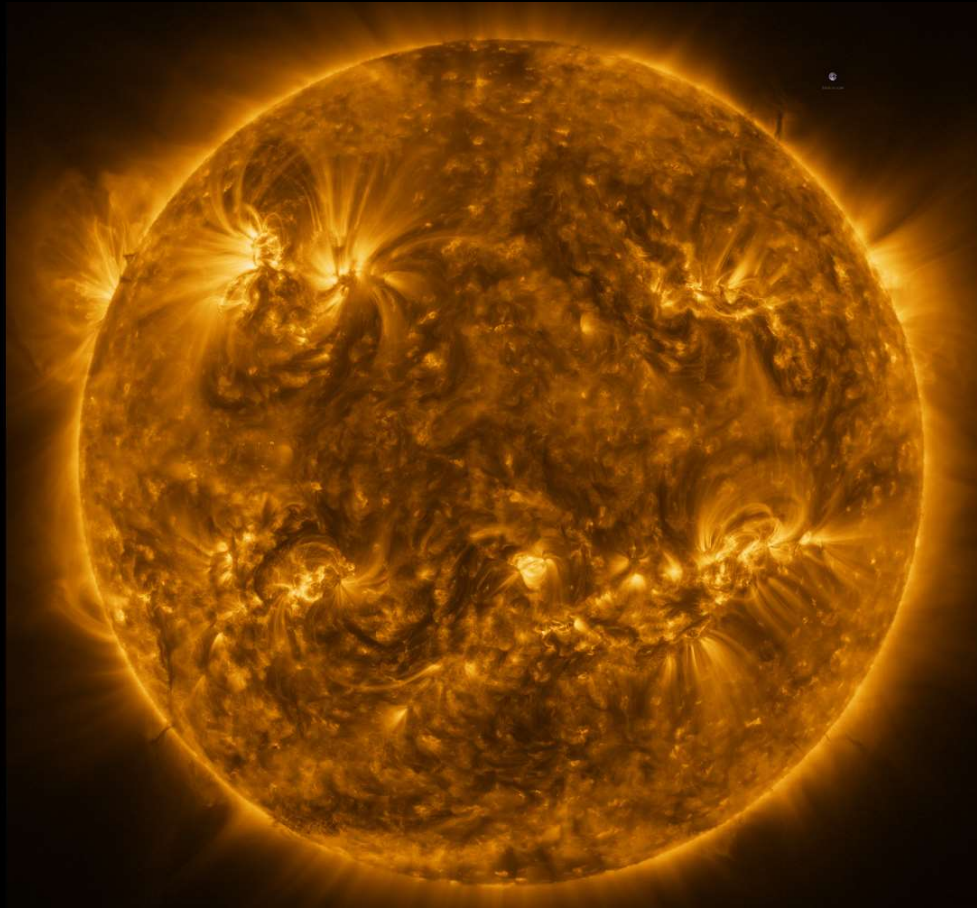
Φυσική των αστέρων

Μάθημα 1

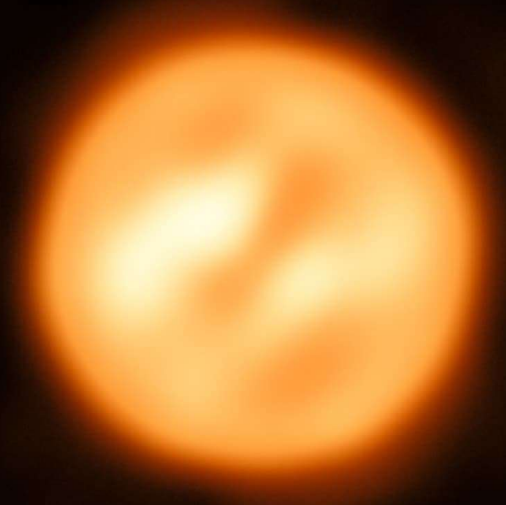
α.ε. 2024-25

Περιεχόμενο του μαθήματος

- **Εισαγωγή** – υπενθύμιση βασικών εννοιών. HR διάγραμμα
- **Διάδοση ακτινοβολίας**: Ειδική ένταση, ροή, πίεση, εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας, λύση σε απλές περιπτώσεις, οπτικό βάθος, σκεδασμός, μέσες ελεύθερες διαδρομές, ιδιότητες μελανού σώματος, θερμοδυναμική ισορροπία, συντελεστές Einstein.
- **Αστρική δημιουργία**. Πρωτοαστέρες. Hayashi track.
- **Εσωτερικό αστέρων**. Καταστατική εξίσωση. Διάδοση ενέργειας. Θερμοπυρηνικές αντιδράσεις. Εξισώσεις αστρικής δομής
- **Αστρική εξέλιξη**. Κύρια ακολουθία. Εξέλιξη μετά την κύρια ακολουθία για αστέρες μικρής και μεγάλης μάζας
- **Αστρικές ατμόσφαιρες**. Μοντέλο παρ/πίπεδης ατμόσφαιρας, προφίλ φασματικών γραμμών
- **Μεταβλητοί αστέρες**. Ακτινικές αναπάλσεις. Ζώνη αστάθειας στο HR διάγραμμα.
- **Συμπαγείς αστέρες**: Τα τελικά στάδια αστρικής εξέλιξης: Λευκοί νάνοι, αστέρες νετρονίων, πάλσαρ, εσωτερικό και μαγνητόσφαιρες, εκρήξεις και υπολείμματα υπερκαινοφανών, μελανές οπές
- **Διπλοί αστέρες**: Προσδιορισμός μαζών και εξέλιξη, ενδιαφέρουσες περιπτώσεις διπλών συστημάτων εξελιγμένων αστέρων.



Sun with Solar Orbiter in extreme ultraviolet light



ESO-VLT Antares red supergiant

Λίγη ιστορία



Arthur Eddington
Θερμοπυρηνικές αντιδράσεις
 $H \rightarrow He$ εξωθερμική
1930'ς

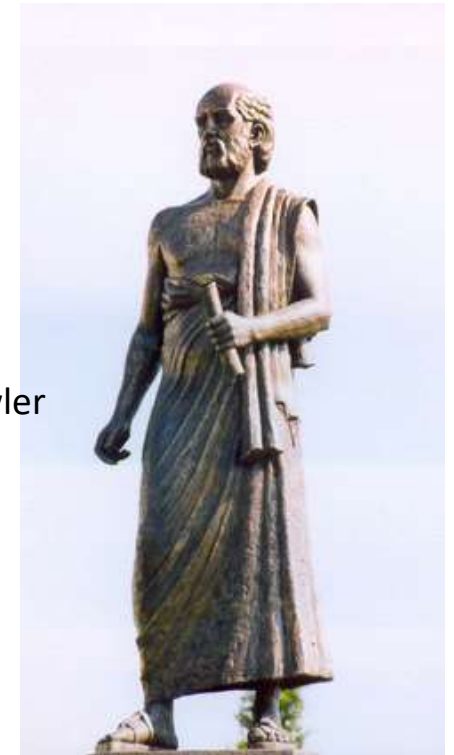
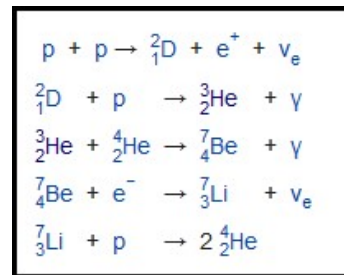


Hans Bethe B. Nobel 1967
Θερμοπυρηνικές αντιδράσεις



S. Chandrasekhar/W. Fowler
B. Nobel 1983
Αστρική δομή και εξέλιξη

electrons. The nucleus of the helium atom, for example, consists of four hydrogen atoms bound with two electrons. But Aston has further shown conclusively that the mass of the helium atom is less than the sum of the masses of the four hydrogen atoms which enter into it; and in this, at any rate, the chemists agree with him. There is a loss of mass in the synthesis amounting to about 1 part in 120, the atomic weight of hydrogen being 1.008 and that of helium just 4. I will not dwell on his beautiful proof of this, as you will, no doubt, be able to hear it from himself. Now mass cannot be annihilated, and the deficit can only represent the mass of the electrical energy set free in the transmutation. We can therefore at once calculate the quantity of energy liberated when helium is made out of hydrogen. If 5 per cent. of a star's mass consists initially of hydrogen atoms, which are gradually being combined to form more complex elements, the total heat liberated will more than suffice for our demands, and we need look no further for the source of a star's energy.



Αρίσταρχος ο Σάμιος
Τα άστρα είναι σαν τον ήλιο
αλλά σε μεγάλες αποστάσεις

Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία – υπενθύμιση βασικών όρων (βλ. Εισαγωγή στην Αστροφυσική) Φωτεινότητα (Luminosity)

- Η φωτεινότητα (luminosity), L , ενός αντικείμενου είναι ο ρυθμός με τον οποίο το αντικείμενο αυτό εκπέμπει προς τα έξω την ενέργειά του.

$$dE = Ldt$$

- Μονάδες ισχύος

CGS: erg s^{-1}

SI : Watts

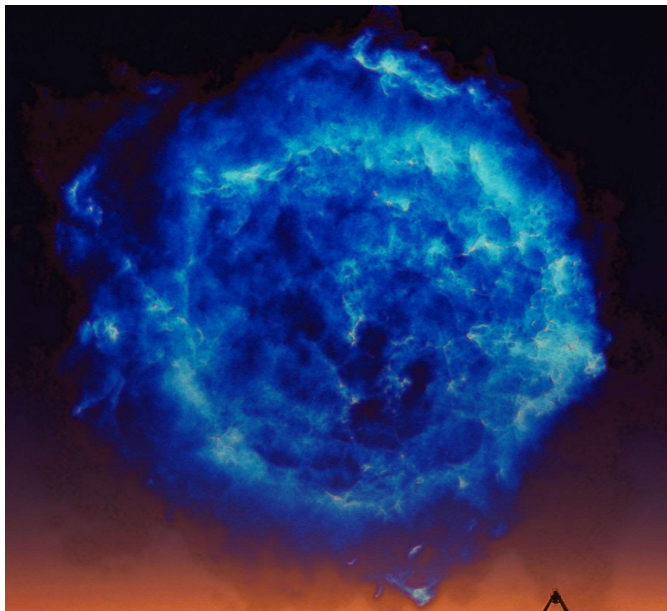
- Η φωτεινότητα είναι **εγγενής ιδιότητα** του αντικείμενου και δεν εξαρτάται από τον παρατηρητή (την απόστασή του ή την γωνία υπό την οποία παρατηρεί το αντικείμενο)

- Οποιοδήποτε αντικείμενο, ανεξάρτητα από το σχήμα του μπορεί να περιγραφεί από τη φωτεινότητά του.

Ο ήλιος για παράδειγμα έχει φωτεινότητα $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{33} \text{ergs}^{-1}$, από την οποία ένα μικρό μόνο ποσοστό φτάνει στη Γη.

Βολομετρική Φωτεινότητα – Φασματική ισχύς

Όταν λέμε «φωτεινότητα» εννοούμε τη συνολική φωτεινή ισχύ της πηγής σε όλα τα μήκη κύματος → βολομετρική φωτεινότητα (bolometric luminosity)



Φασματική φωτεινότητα (spectral luminosity) ή φασματική ισχύς (spectral power) είναι η φωτεινότητα ανά μονάδα μήκους κύματος, L_λ (μονάδες στο CGS of $\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-1}$), ή ανά μονάδα συχνότητας L_ν ($\text{ergs}^{-1}\text{Hz}^{-1}$), δηλ. αν η στοιχειώδης φωτεινότητα μεταξύ λ και $\lambda + d\lambda$ (ή ν , και $\nu + d\nu$) είναι dL , τότε

$$dL = L_\lambda d\lambda = L_\nu d\nu$$

$$\text{Βολομετρική φωτεινότητα } L_{bol} = \int L_\lambda d\lambda = \int L_\nu d\nu$$

π.χ. Το SNR Cas A έχει φωτεινότητα

$$L_{\text{radio}} = 3 \times 10^{35} \text{ergs}^{-1},$$

$$\text{από } \nu_1 = 2 \times 10^7 \text{Hz} \text{ μέχρι } \nu_2 = 2 \times 10^{10} \text{Hz}$$

$$\text{και } L_{X\text{-ray}} = 3 \times 10^{37} \text{ erg s}^{-1} \text{ από } 0.3 \text{ μέχρι } 10 \text{ keV}$$

$$L_{bol} = L_{X\text{-ray}} + L_{\text{radio}} + L_{\text{optical}} + L_{\text{UV}} + \dots$$

https://chandra.harvard.edu/photo/2017/casa_life/

<https://www.nrao.edu/archives/files/original/76e39ad77c96b357c827b63a5dfc175e.jpg>

Ροή ακτινοβολίας (flux)

- Η **ροή** μίας πηγής, f ($\text{erg s}^{-1}\text{cm}^{-2}$), είναι η ακτινοβολούμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που περνά από μία μοναδιαία επιφάνεια δηλ. $dL = f dA$
- Όπως με τη φωτεινότητα, μπορούμε να ορίσουμε τη ροή ανά μοναδιαία φασματική περιοχή (είτε σε μήκος κύματος, είτε σε συχνότητα).

→ Φασματική πυκνότητα ροής (spectral flux density) f_ν σε μονάδες

$\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$ ή f_λ σε μονάδες $\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{cm}^{-1}$ ορίζεται αντί-

στοιχα ως

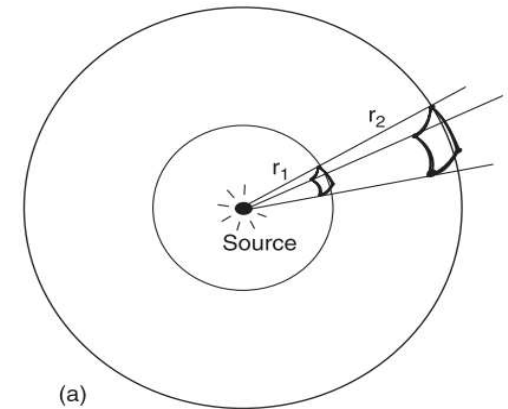
$$dL_\nu = f_\nu dA \quad dL_\lambda = f_\lambda dA$$

$$df = f_\nu d\nu \quad df = f_\lambda d\lambda$$

- Σχέση φωτεινότητας – ροής $L = \int f dA = 4\pi r^2 f$, όπου r η απόστασι από το κέντρο της πηγής μέχρι το σημείο στο οποίο μετριέται η ροή.

Η ισότητα $= 4\pi r^2 f$ ισχύει μόνο όταν η ενέργεια ακτινοβολείται από τη πηγή **ισοτροπικά**.

- Ειδική μονάδα μέτρησης ροής (radio, IR) $1\text{Jy} = 10^{-26}\text{Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1} = 10^{-23}\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$



(a)

Αστροφυσική ροή ακτινοβολίας (ροή στην αστρική επιφάνεια)

- Ορίζουμε τη ροή F στην επιφάνεια ενός άστρου φωτεινότητας L_* και ακτίνας R_* , ως εξής

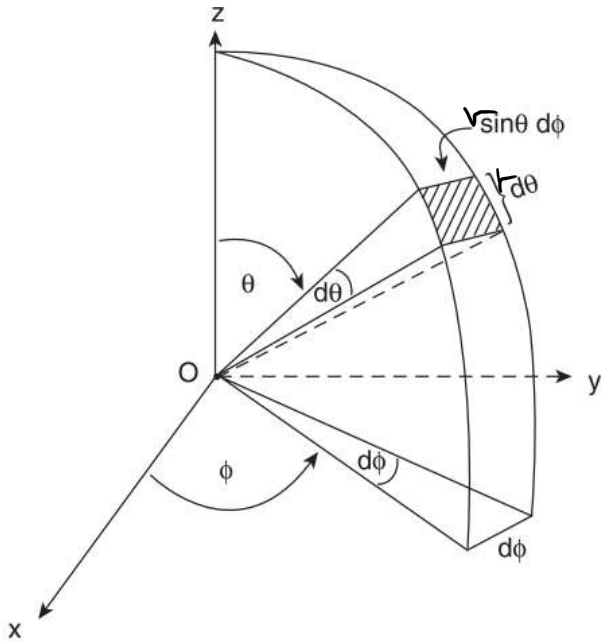
$$L_* = 4\pi R_*^2 F = 4\pi r^2 f \Rightarrow f = \left(\frac{R_*}{r}\right)^2 F \quad (f \text{ η ροή σε απόσταση } r)$$

π.χ. για τον Ήλιο: $F_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2} = 6.33 \times 10^{10} \text{ ergs}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ και

$f_{\odot} \equiv S = 1.367 \times 10^6 \text{ ergs}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ είναι η λεγόμενη **ηλιακή σταθερά** (r η απόσταση γης-ήλιου).

Η ροή μιας πηγής σε μία συγκεκριμένη περιοχή μηκών κύματος (ή συχνοτήτων) είναι μία μετρήσιμη ποσότητα, φτάνει να λάβουμε υπόψη μας τις διορθώσεις για την απόκριση της γήινης ατμόσφαιρας, του τηλεσκοπίου και του ανιχνευτή μας. Αν ξέρουμε και την απόσταση της πηγής, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίστοιχη φωτεινότητα. (+διορθώσεις...)

Η έννοια της στερεάς γωνίας

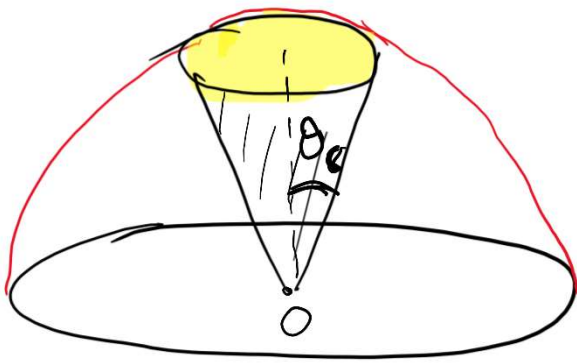


dA πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας $dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d\Omega &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \right] d\phi = \int_0^{2\pi} [-\cos \pi + \cos 0] d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} 2 d\phi = 4\pi \end{aligned}$$

Παράδειγμα – η στερεά γωνία υπό την οποία φαίνεται ο ηλιακός δίσκος

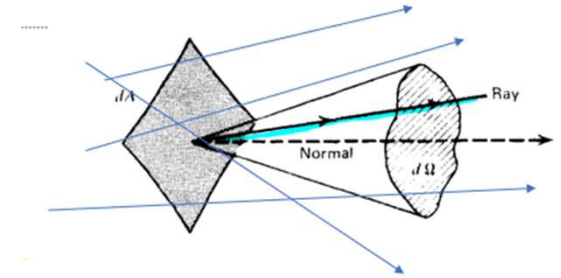


$$\triangleright \int_{\Omega_{\odot}} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_0^{\theta_c} \sin\theta d\theta \right] = 2\pi(1 - \cos\theta_c)$$

$$\triangleright \text{Ανάπτυγμα Taylor } \cos\theta_c = 1 - \frac{\theta_c^2}{2} + \dots$$

$$\triangleright \text{Άρα } \Omega_{\odot} = 2\pi \frac{\theta_c^2}{2} = \pi \theta_c^2 \text{ (η } \theta_c \text{ σε ακτίνια)}$$

Ένταση (intensity) και ειδική ένταση (specific intensity) του φωτός



- **Ένταση**, I ($\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{sr}^{-1}$) είναι η ακτινοβολούμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και ανά μοναδιαία στερεά γωνία που περνά από στοιχειώδη επιφάνεια κάθετη στη κατεύθυνση της εκπομπής.
- **Ειδική ένταση**, I_λ ή I_ν ($\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{sr}^{-1}\text{cm}^{-1}$ ή $\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{sr}^{-1}\text{Hz}^{-1}$) είναι η ακτινοβολούμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου, ανά μοναδιαία στερεά γωνία και ανά μοναδιαίο εύρος μήκους κύματος ή συχνότητας, που περνά από στοιχειώδη επιφάνεια κάθετη στη κατεύθυνση της εκπομπής.

$$dE = I_\nu \cos \theta \, d\nu \, d\Omega \, dA \, dt$$

- **Σχέση έντασης - ροής**

$$df = I \cos \theta d\Omega \quad \text{και} \quad f_\nu = I_\nu \cos \theta d\Omega$$

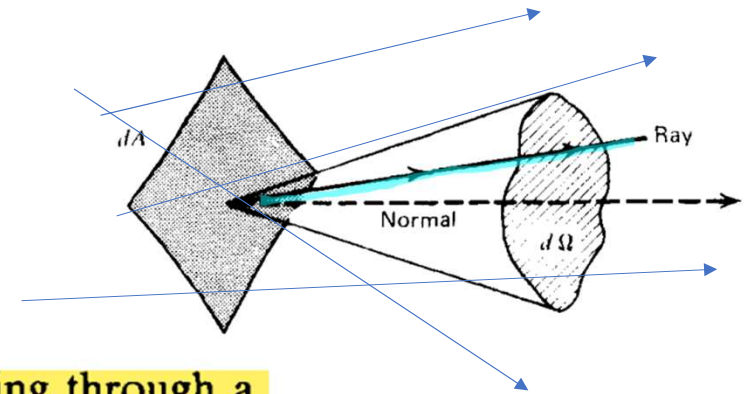
Σχόλιο από το βιβλίο του Clayton

Definition of Specific Intensity or Brightness

The flux is a measure of the energy carried by *all rays* passing through a given area. A considerably more detailed description of radiation is to give the energy carried along by *individual rays*. The first point to realize, however, is that a single ray carries essentially no energy, so that we need to consider the energy carried by sets of rays, which differ infinitesimally from the given ray. The appropriate definition is the following: Construct an area dA normal to the direction of the given ray and consider all rays passing through dA whose direction is within a solid angle $d\Omega$ of the given ray (see Fig. 1.2). The energy crossing dA in time dt and in frequency range $d\nu$ is then defined by the relation

$$dE = I_\nu dA dt d\Omega d\nu, \quad (1.2)$$

where I_ν is the *specific intensity* or *brightness*. The specific intensity has the



Παραδείγματα

α. Πόση ροή θα καταγράψει ένας ανιχνευτής που κοιτάζει κατευθείαν προς μία πηγή ομοιόμορφης έντασης, υπό μία μικρή στερεά γωνία Ω ;

$$df = I \cos \theta d\Omega \Rightarrow f = \int_{\Omega} I \cos \theta d\Omega \approx I\Omega$$

β. Βρείτε την ροή στην επιφάνεια ενός ουράνιου αντικειμένου (π.χ. άστρου) όταν η ακτινοβολία φεύγει ελεύθερα προς όλες τις γωνίες προς τα έξω (δηλ. σε 2π sr)

$$F = \int I \cos \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \pi I$$

Η ειδική ένταση (και η ένταση) είναι ανεξάρτητη της απόστασης

Η ειδική ένταση (και η ένταση) διατηρείται κατά μήκος οποιασδήποτε ακτίνας που διαδίδεται στον ελεύθερο χώρο. Η ειδική ένταση και η ένταση είναι ανεξάρτητες της απόστασης της πηγής.

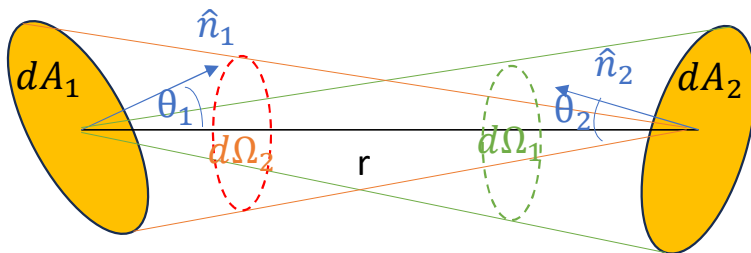
Απόδειξη

Στερεά γωνία υπο την οποία φαίνεται η επιφάνεια dA_2 από το κέντρο της dA_1

$$d\Omega_1 = \frac{\cos\theta_2 dA_2}{r^2}$$

Στερεά γωνία υπο την οποία φαίνεται η επιφάνεια dA_1 από το κέντρο της dA_2

$$d\Omega_2 = \frac{\cos\theta_1 dA_1}{r^2}$$



Έχουμε :

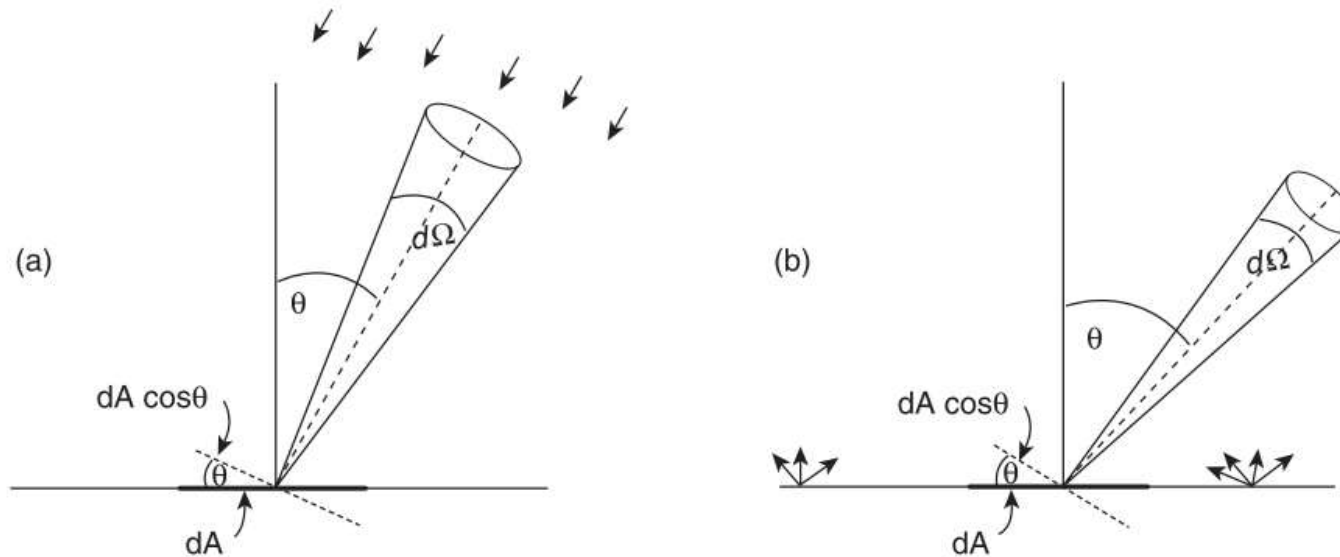
$$dE_{\nu,1} = I_{\nu,1} \cos \theta_1 d\nu d\Omega_1 dA_1 dt = I_{\nu,1} \cos \theta_1 d\nu \frac{\cos \theta_2 dA_2}{r^2} dA_1 dt$$

$$dE_{\nu,2} = I_{\nu,2} \cos \theta_2 d\nu d\Omega_2 dA_2 dt = I_{\nu,2} \cos \theta_2 d\nu \frac{\cos \theta_1 dA_1}{r^2} dA_2 dt$$

Αλλά από διατήρηση της ενέργειας (ελεύθερος χώρος)

$$dE_{\nu,1} = dE_{\nu,2} \Rightarrow I_{\nu,1} = I_{\nu,2}$$

Συνέπεια της παραπάνω ιδιότητας, είναι το ότι η ένταση I είναι ίδια και στη πηγή και στον ανιχνευτή

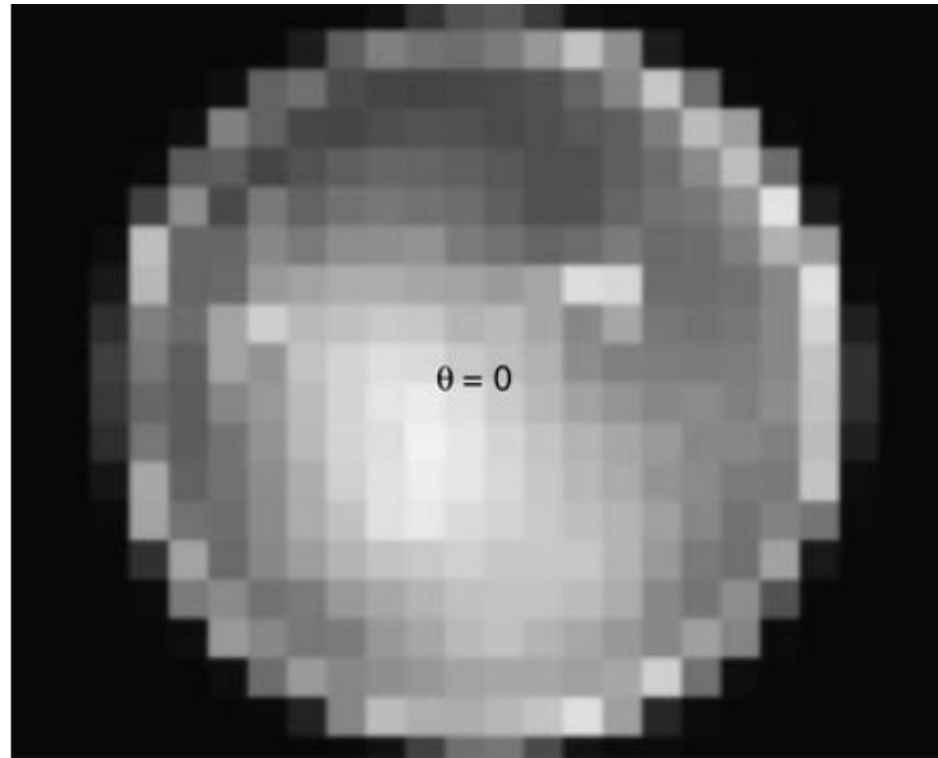


Εικόνα από βιβλίο J. Irwin, *Astrophysics, Decoding the Cosmos*

(α) Εδώ το dA μπορεί να είναι ένα στοιχείο ανιχνευτή στην επιφάνεια της γης. Η κάθετος στην επιφάνεια αυτή (κατακόρυφη) σχηματίζει γωνία θ με τη κατεύθυνση από την οποία έρχεται η ακτινοβολία (την κατεύθυνση της πηγής). $d\Omega$ είναι η στοιχειώδης στερεά γωνία υπό την οποία φαίνεται η πηγή. (β) Σε αυτό το παράδειγμα η επιφάνεια dA είναι τοποθετημένη στην επιφάνεια ενός άστρου. Η ένταση θα συμπεριλαμβάνει μόνο τα φωτόνια που εμπεριέχονται στη συγκεκριμένη στοιχειώδη στερεά γωνία $d\Omega$.

Resolved source

Όταν η πηγή «διακρίνεται στη λεπτομέρειά της» μπορούμε να μετρήσουμε την ένταση ακτινοβολίας σε κάθε εικονοστοιχείο (pixel)



Π.χ. στον ηλιακό δίσκο μπορούμε να μετρήσουμε το I . Η μεταβολή του πάνω στον δίσκο από το κέντρο προς τα άκρα είναι η λεγόμενη αμαύρωση χείλους

Ας υποθέσουμε ότι ο ανιχνευτής μας είναι στραμμένος κατευθείαν ($\theta=0$) προς μια πηγή που φαίνεται υπό μια μικρή στερεά γωνία Ω . Η γωνία αυτή είναι αρκετά μικρή ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\theta=0$ σε οποιαδήποτε θέση. Σε αυτό το παράδειγμα η ένταση I δεν είναι ομοιογενής. Μπορούμε να χωρίσουμε την Ω σε μικρές γωνίες Ω_i . Σε καθεμιά από αυτές η ένταση είναι I_i . Η ροή μπορεί να προσεγγιστεί ως $f = \int I \cos \theta d\Omega \approx \sum I_i \Omega_i$.

Εικόνα από βιβλίο J. Irwin, *Astrophysics, Decoding the Cosmos*

Unresolved source – δεν μπορούμε να βρούμε την ένταση, μόνο τη ροή



Figure 1.9. In this case, a star has a very small angular size (left) and so, when detected in a square solid angle, Ω_p (right), which is determined by the properties of the detector, its light is 'smeared out' to fill that solid angle. In such a case, it is impossible to determine the intensity of the surface of the star. However, the flux of the star, f_* , is preserved, i.e. $f_* = I_* \Omega_* = \bar{I} \Omega_p$ (Eq. 1.13) where I_* is the true intensity of the star, Ω_* is the true solid angle subtended by the star, and \bar{I} is the mean intensity in the square. Thus, for an object of angular size smaller than can be resolved by the available instruments (see Sects. 2.2.3, 2.2.4, and 2.3.2), we measure the flux (or flux density), but not intensity (or specific intensity) of the object

Μέση ένταση ακτινοβολίας

- Η μέση ένταση προκύπτει από τη μέση τιμή της έντασης της ακτινοβολίας από όλες τις κατευθύνσεις

$$J \equiv \frac{\int I d\Omega}{\int d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int I d\Omega$$

- Για ένα ισοτροπικό πεδίο $J = I$
- Γενικά τα πεδία ακτινοβολίας δεν είναι ισοτροπικά, μερικά όμως είναι κατά προσέγγιση ισοτροπικά, όπως στα κέντρα των άστρων και η μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου (Cosmic Microwave Background radiation - 2.7K)
- Σε ένα ανισοτροπικό πεδίο ακτινοβολίας το J δεν είναι ανεξάρτητο της απόστασης, ενώ το I είναι.

Σχόλια για τη μέση ένταση ακτινοβολίας

➤ Για ισοτροπικό πεδίο $J = \frac{1}{4\pi} \int I d\Omega = \frac{I}{4\pi} \int d\Omega = I$

(το ίδιο ισχύει προφανώς και για την ειδική ένταση)

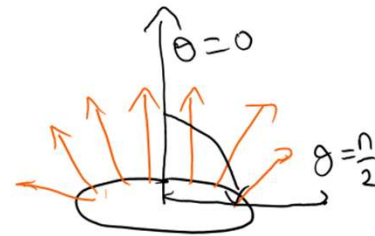
Σχόλιο: παρατηρείστε ότι η ροή στο ισοτροπικό πεδίο είναι μηδέν:

$$f_v = I_v \cos \int \theta d\Omega = I_v 2\pi \int_0^\pi \cos\theta \sin\theta d\theta = 2\pi I_v \left(-\frac{\cos^2 \theta}{2} \right) \Big|_0^\pi = 0$$

Γενικά τα πεδία ακτινοβολίας δεν είναι ισοτροπικά, μερικά όμως είναι κατά προσέγγιση ισοτροπικά, όπως στα κέντρα των άστρων και η μικροκυματική ακτινοβολία υποβάθρου (Cosmic Microwave Background radiation - 2.7K)

➤ Η μέση ένταση που εκπέμπεται ομοιογενώς προς τα έξω από επιφάνεια:

$$J = \frac{1}{4\pi} \int I d\Omega = \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{I}{4\pi} \underbrace{2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta}_{=2} = \frac{I}{2}$$



➤ Προσοχή, στη περίπτωση ανισοτροπικού πεδίου ακτινοβολίας, η μέση ένταση εξαρτάται από την απόσταση (ενώ η ένταση όχι)

Π.χ. φανταστείτε ότι παρατηρείτε μία πηγή επιφάνειας A . Η στερεά γωνία υπό την οποία βλέπετε αυτή την επιφάνεια είναι A/r^2 , οπότε μικραίνει όσο μεγαλώνει η απόσταση, οπότε και η μέση ένταση θα μικραίνει (ο παρανομαστής παραμένει σταθερός $=4\pi$)

Ακτινοβολία από όλες τις γωνίες – πυκνότητα ενέργειας (energy density) και μέση ένταση (mean intensity)

➤ Η **πυκνότητα ενέργειας** (energy density), u (erg cm^{-3}), είναι η ενέργεια ακτινοβολίας (radiative energy) ανά μονάδα όγκου $du = \frac{dE}{dV}$

➤ Η ειδική πυκνότητα ενέργειας (specific energy density) είναι η πυκνότητα ενέργειας ανά μοναδιαία περιοχή συχνότητας, u_ν , ή μήκους κύματος, u_λ και ορίζεται ως

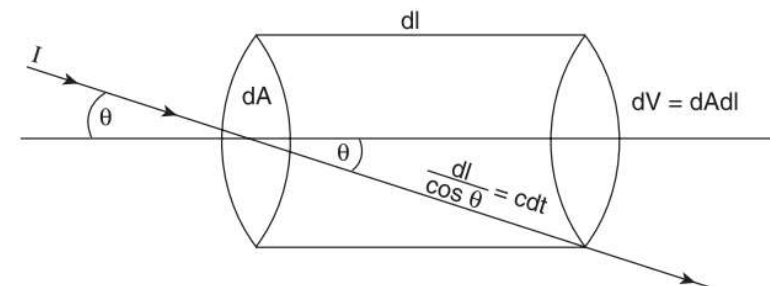
$$u = \int u_\nu d\nu = \int u_\lambda d\lambda$$

➤ Η πυκνότητα ενέργειας σχετίζεται με την ένταση ακτινοβολίας I ως εξής

$$u = \frac{1}{c} \int I d\Omega = \frac{4\pi}{c} J, \text{ όπου } J \text{ η μέση ένταση } J = \frac{1}{4\pi} \int I d\Omega$$

Απόδειξη $dE = I_\nu \cos \theta d\nu d\Omega dA dt$

$$\begin{aligned} du &= \frac{dE}{dV} = \frac{I_\nu \cos \theta d\nu d\Omega dA dt}{dA dl} = \frac{I_\nu d\nu d\Omega dA}{c dA} \\ &= \frac{I_\nu d\nu d\Omega}{c} \Rightarrow u = \frac{1}{c} \iint I_\nu d\nu d\Omega = \frac{1}{c} \int I d\Omega \end{aligned}$$



$$dl = \cos \theta c dt$$

Εικόνα από βιβλίο J. Irwin, Astrophysics, Decoding the Cosmos

Εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας

- Καθώς η φωτεινή ακτινοβολία περνά μέσα από ένα μέσο, ενέργεια μπορεί να προστεθεί ή να αφαιρεθεί από αυτή μέσω διάφορων μηχανισμών
 - (i) εκπομπής (ii) απορρόφησης και (iii) σκεδασμού φωτονίων.
 Έστω λοιπόν αστροφυσικό αντικείμενο στο οποίο δρουν διάφοροι τέτοιοι μηχανισμοί. Ποιο είναι το I_ν που δημιουργείται στο αντικείμενο αυτό;
- Η απάντηση δίνεται από τη λεγόμενη **Εξίσωση Διάδοσης Ακτινοβολίας (Ε.Δ.Α.)**

1^η περίπτωση – Ελεύθερος Χώρος

- Αποδείξαμε ότι στον **ελεύθερο χώρο** (όπου δεν υπάρχει εκπομπή απορρόφηση ή σκεδασμός), το I_ν **παραμένει σταθερό**.

Αν θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες μήκος διαδρομής ds , η αντίστοιχη μεταβολή της (εδώ ειδικής) έντασης είναι dI_ν . Στον ελεύθερο χώρο, προφανώς

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0 \Rightarrow I_\nu = \text{const} \quad (1)$$

2^η περίπτωση – Εκπομπή (emission)

➤ Ορίζουμε τον συντελεστή εκπομπής j_ν ως εξής

$$dE = j_\nu dV dt d\nu d\Omega \quad (dV = dA ds)$$

με μονάδες $\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{sterad}^{-1}$

➤ Η αντίστοιχη ^{εξέταση} διάδοση ακτινοβολίας θα είναι $\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu$ (2)

(θυμηθείτε ότι μονάδες για το I_ν είναι $\text{ergs}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$)

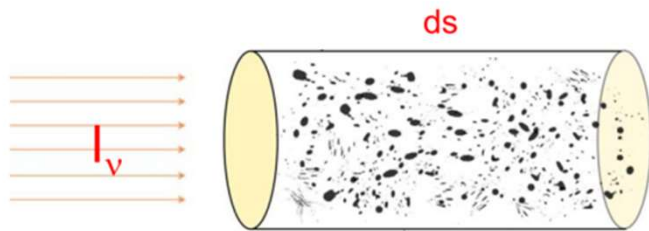
Ολοκληρώνοντας την (2) παίρνουμε $I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^s j_\nu(s') ds'$ (3)

Ειδική περίπτωση όταν το j_ν είναι ανεξάρτητο του s , $s_0 = 0$ και $I_\nu(0) = 0$

(3) $\Rightarrow I_\nu(s) = j_\nu s$, δηλ. η ειδική ένταση αυξάνεται γραμμικά όσο η δέσμη διασχίζει τη πηγή.

3^η περίπτωση – απορρόφηση (absorption)

Η μείωση του I_ν λόγω απορρόφησης, dI_ν , είναι ανάλογη της προσπίπτουσας έντασης I_ν , του μήκους διαδρομής μέσα στο υλικό που απορροφά, και του λεγόμενου συντελεστή απορρόφησης α_ν



$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu(s) ds$$

μονάδες του α_ν cm^{-1}

Μικροσκοπική ερμηνεία – σχέση με τις ιδιότητες του απορροφητή:

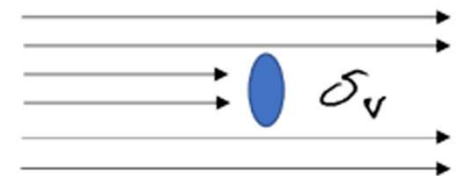
Έστω n η αριθμητική πυκνότητα των απορροφητών (αριθμός / μονάδα όγκου).

Έστω σ_ν η ενεργός διατομή της διεργασίας απορρόφησης (σε cm^{-2}).

Ο συνολικός αριθμός των απορροφητών σε όγκο dV (βλ σχήμα) θα είναι: $ndV = ndAds$

Η συνολική «ενεργός» επιφάνεια των απορροφητών είναι $n\sigma_\nu dAds$

και η απορροφούμενη ισχύς θα είναι $dI_\nu = -n\sigma_\nu I_\nu ds \rightarrow \alpha_\nu = n\sigma_\nu$



Συνθήκες για να ισχύει αυτή η μικροσκοπική ερμηνεία:

(1) Η διάμετρος της ενεργού διατομής πρέπει να είναι \ll της μέσης απόστασης μεταξύ των σωματιδίων, δηλ.

$$\sigma_v^{1/2} \ll d \sim n^{-1/3}$$

(2) Οι απορροφητές είναι ανεξάρτητοι και τυχαία κατανεμημένοι

Γενικά οι συνθήκες αυτές ισχύουν στα περισσότερα αστροφυσικά προβλήματα.

➤ Επίσης μερικές φορές χρησιμοποιείται ο συντελεστής απορρόφησης μάζας k_ν (cm^2/g), που ορίζεται από τη σχέση $\alpha_\nu = \rho k_\nu$ **Mass absorption coefficient or opacity coefficient**

➤ Η αντίστοιχη Ε.Δ.Α. γράφεται $\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu \Rightarrow$

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp \left[- \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \right] = I_\nu(s_0) e^{-\tau_\nu(s)} \quad (7)$$

οπτικό βάθος (optical depth) $\tau_\nu(s) = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds'$ (8)

➤ Ειδική περίπτωση που το α_ν είναι ανεξάρτητο του s ($d\tau_\nu = \alpha_\nu ds$)

$$\tau_\nu = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' = \alpha_\nu (s - s_0) = \alpha_\nu R = n \sigma_\nu R \quad (9)$$

✓ Το οπτικό βάθος ορίζεται κατά μήκος της διαδρομής της ακτίνας



✓ Μερικές φορές το οπτικό βάθος μετρείται προς τα πίσω (όπως θα δούμε στις αστρικές ατμόσφαιρες), οπότε εμφανίζεται ένα αρνητικό πρόσημο στην (8).

Μέση ελεύθερη διαδρομή: η μέση απόσταση που διανύει το φωτόνιο μέχρι να απορροφηθεί

Από τη σχέση (7) προκύπτει ότι η πιθανότητα ένα φωτόνιο να διανύσει ένα οπτικό βάθος τ_ν είναι $e^{-\tau_\nu}$.

Έτσι το μέσο οπτικό βάθος που διανύεται είναι ίσο με $\langle \tau_\nu \rangle \equiv \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1$

Λέμε ότι το μέσο είναι οπτικά πυκνό όταν $\tau_\nu \gg 1$, και οπτικά αραιό όταν $\tau_\nu \ll 1$.

Από τον ορισμό της μέσης ελεύθερης διαδρομής, και του οπτικού βάθους προκύπτει ότι

$$\langle \tau_\nu \rangle = \alpha_\nu l_\nu = 1 \Rightarrow l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{n\sigma_\nu}$$

4^η περίπτωση – Εκπομπή και Απορρόφηση

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{\alpha_\nu ds} = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} - I_\nu \Rightarrow \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu \quad (11)$$

όπου $S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$ η **συνάρτηση πηγής**.

Πολ/ζουμε την (11) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{τ_ν} και ορίζουμε δύο νέες συναρτήσεις

$$J = I_\nu e^{\tau_\nu} \text{ και } S = S_\nu e^{\tau_\nu} \quad (12)$$

οπότε η (11) γίνεται

$$\frac{dJ}{d\tau_\nu} = S \text{ που έχει λύση } J(\tau_\nu) = J(0) + \int_0^{\tau_\nu} S(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \quad (13)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (12) στη (13) παίρνουμε

τη γενική λύση της (11)

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \quad (14)$$

Ευθετική μείωση
της φασικής έντασης
λόγω απορρόφησης

η σταθμευμένη πηγή (μεωμένη
λόγω απορρόφησης)

Ειδική περίπτωση 1:

$S_\nu = \text{σταθ}$ (ανεξάρτητο του τ_ν)

$$\frac{dI_\nu}{S_\nu - I_\nu} = d\tau_\nu \Rightarrow \int \frac{dI_\nu}{S_\nu - I_\nu} = \int d\tau'_\nu \Rightarrow \ln |S_\nu - I_\nu| = -\tau_\nu + c' \Rightarrow$$

$$S_\nu - I_\nu = c e^{-\tau_\nu}$$

Για $\tau_\nu = 0, I_\nu = I_\nu(0)$, οπότε $S_\nu - I_\nu(0) = c$ και $S_\nu - I_\nu = (S_\nu - I_\nu(0)) e^{-\tau_\nu} \Rightarrow$

$$I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu + e^{-\tau_\nu}(I_\nu(0) - S_\nu)$$

(α) αν $I_\nu(0) = 0$, δηλ. δεν έχω καθόλου αρχική δέσμη, τότε όλα τα φωτόνια παράγονται μέσα στο μέσο και $I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$

Έστω επιπλέον ότι το τ_ν είναι πάρα πολύ μικρό.

Τότε κάνω ανάπτυγμα Taylor ως προς τ_ν και έχω $I_\nu(\tau_\nu) \approx S_\nu(1 - 1 + \tau_\nu + \dots) = S_\nu \tau_\nu$

Αλλά $S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$ και $\tau_\nu \approx \alpha_\nu L$ δηλ. $I_\nu(\tau_\nu) \approx j_\nu L$

(β) αν $\tau_\nu \rightarrow \infty, I_\nu \rightarrow S_\nu$ δηλ. η ειδική ένταση ακτινοβολίας τείνει να ταυτιστεί με τη συνάρτηση πηγής, ή αλλιώς τη συνάρτηση πηγής θα τη παρατηρήσω απευθείας μόνο αν το οπτικό βάθος είναι πολύ μεγάλο.

Σχόλια

$$\text{Ε. Δ. Α. } \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu$$

Παρατηρούμε ότι όταν το $I_\nu > S_\nu$ το $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu}$ είναι < 0 και το I_ν μειώνεται κατά μήκος της διεύθυνσης διάδοσης

Αν αντίθετα $I_\nu < S_\nu$ το $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu}$ είναι > 0 και το I_ν αυξάνεται κατά μήκος της διαδρομής.

Έτσι η συνάρτηση πηγής είναι η ποσότητα που η ειδική ένταση «προσπαθεί να πλησιάσει», κάτι που το καταφέρνει σε κάποιο επαρκές οπτικό βάθος. [Είδαμε ότι στη περίπτωση που η συνάρτηση πηγής είναι σταθερή, αυτό συμβαίνει στο άπειρο.]

Με αυτό το σκεπτικό, μπορούμε να πούμε ότι η Ε.Δ.Α. εκφράζει μία relaxation process.

Δεν έχουμε ακόμα λάβει υπόψη μας τη σκέδαση στην Ε.Δ.Α. Θα το κάνουμε αργότερα.

Επίσης στην απορρόφηση μπορούμε να συμπεριλάβουμε και την εξαναγκασμένη εκπομπή (με αντίθετο βέβαια πρόσημο) αφού και οι δύο εξαρτώνται από την ένταση της εισερχόμενης δέσμης

Εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας – Περίληψη τύπων

Ελεύθερος Χώρος

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0 \Rightarrow I_\nu = \text{const}$$

Εκπομπή (emission)

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu \quad (j_\nu \text{ συντελεστής εκπομπής})$$

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^s j_\nu(s') ds'$$

Ειδική περίπτωση: j_ν ανεξάρτητο του s , $s_0 = 0$ και $I_\nu(0) = 0 \rightarrow I_\nu(s) = j_\nu s$

Απορρόφηση (absorption)

$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu(s) ds$ (α_ν συντελεστής απορρόφησης, $\alpha_\nu = n\sigma_\nu$ (cm^{-1}), n αριθμητική πυκνότητα απορροφητών, σ_ν ενεργός διατομή)

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp \left[- \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \right] = I_\nu(s_0) e^{-\tau_\nu(s)}$$

$$\text{οπτικό βάθος } \tau_\nu(s) = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \quad (d\tau_\nu(s) = \alpha_\nu(s) ds)$$

$$\text{Μέση ελεύθερη διαδρομή } \bar{l}_\nu \equiv \frac{1}{n\sigma_\nu} = \frac{1}{\alpha_\nu}$$

$\tau_\nu > 1$ αδιαφανές μέσο

$\tau_\nu < 1$ διαφανές μέσο

(υπενθ. για ομογενές μέσο $\langle \tau_\nu \rangle = \alpha_\nu l_\nu = 1$)

Εκπομπή και Απορρόφηση

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu$$

$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}$ η συνάρτηση πηγής

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau_\nu')} S_\nu(\tau_\nu') d\tau_\nu'$$

$$\text{Αν } S_\nu = \text{σταθ} \rightarrow I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu + e^{-\tau_\nu}(I_\nu(0) - S_\nu)$$

$$\checkmark \text{ αν } I_\nu(0) = 0 \rightarrow I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$$

$$\text{επιπλέον για } \tau_\nu \ll 1 \quad I_\nu(\tau_\nu) \approx S_\nu \tau_\nu = j_\nu L$$

$$\checkmark \text{ αν } \tau_\nu \rightarrow \infty, \quad I_\nu \rightarrow S_\nu$$

Θερμική ακτινοβολία

- **Θερμική ακτινοβολία** είναι η ακτινοβολία που εκπέμπεται από ύλη σε θερμοδυναμική ισορροπία.
- Τα j_ν και α_ν δεν είναι οποιαδήποτε όταν έχω θερμοδυναμική ισορροπία, αλλά ικανοποιούν τον **νόμο του Kirchhoff**

$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T)$ (14) ή $S_\nu = B_\nu(T)$, όπου B_ν η συνάρτηση Planck

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}, \text{ ή, } B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\left(\frac{hc}{\lambda T}-1\right)} \rightarrow B_\nu d\nu = B_\lambda d\lambda$$

➤ **Η Ε.Δ.Α. γίνεται**

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \alpha_\nu B_\nu(T) \text{ ή } \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T)$$

Αν το $\tau \gg 1$ τότε είδαμε ότι $I_\nu \approx S_\nu = B_\nu(T)$

(δηλ. σε αυτή την περίπτωση η ειδική ένταση περιγράφεται από την συνάρτηση Planck \rightarrow BB)

Αν το τ δεν είναι πολύ μεγάλο, αλλά έχω πάλι Θ.Ι., τότε $I_\nu(\tau_\nu) \approx B_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$
(για $I_\nu(0)=0$)

Blackbody radiation $I_\nu = B_\nu$
Thermal radiation $S_\nu = B_\nu$

Brightness temperature - Θερμοκρασία λαμπρότητας

Εκτός από το CMB, τα περισσότερα αντικείμενα που θεωρούμε ότι εκπέμπουν ως μελανά σώματα (π.χ. άστρα), μόνο κατά προσέγγιση έχουν φάσματα που περιγράφονται από τη συνάρτηση Planck.

Για να λάβουμε υπόψη τυχόν αποκλίσεις, ορίζουμε την λεγόμενη **θερμοκρασία λαμπρότητας - brightness temperature** $T_{B\nu}$ στη παρατηρούμενη συχνότητα ν , ως τη θερμοκρασία που όταν μπει στη συνάρτηση Planck θα δώσει τη μετρούμενη τιμή της ειδικής έντασης για τη συχνότητα αυτή. Αν το σώμα είναι τέλειο μελανό σώμα, τότε η θερμοκρασία αυτή θα είναι η ίδια για όλα τα ν :

$$I_\nu = B_\nu(T_b)$$

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT_b}} - 1\right)}$$

Η θερμοκρασία λαμπρότητας χρησιμοποιείται εκτενώς στη ραδιοαστρονομία, όπου ισχύει με καλή προσέγγιση ο νόμος Rayleigh-Jeans:

$$I_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} kT_b \Rightarrow T_b = \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu \text{ (για } h\nu \ll kT)$$

Η Ε.Δ.Α. μπορεί να γραφεί απλά ως:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T) \Rightarrow \frac{dT_b}{d\tau_\nu} = -T_b + T$$

όπου T η θερμοκρασία του υλικού. Όταν το T είναι σταθερό, προκύπτει ότι:

$$T_b = T_b(0)e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu}), h\nu \ll kT \text{ (όπου για } \tau_\nu=0, T_b = T_b(0))$$

$$\text{Όταν } \tau_\nu \rightarrow \infty \quad T_b \rightarrow T$$

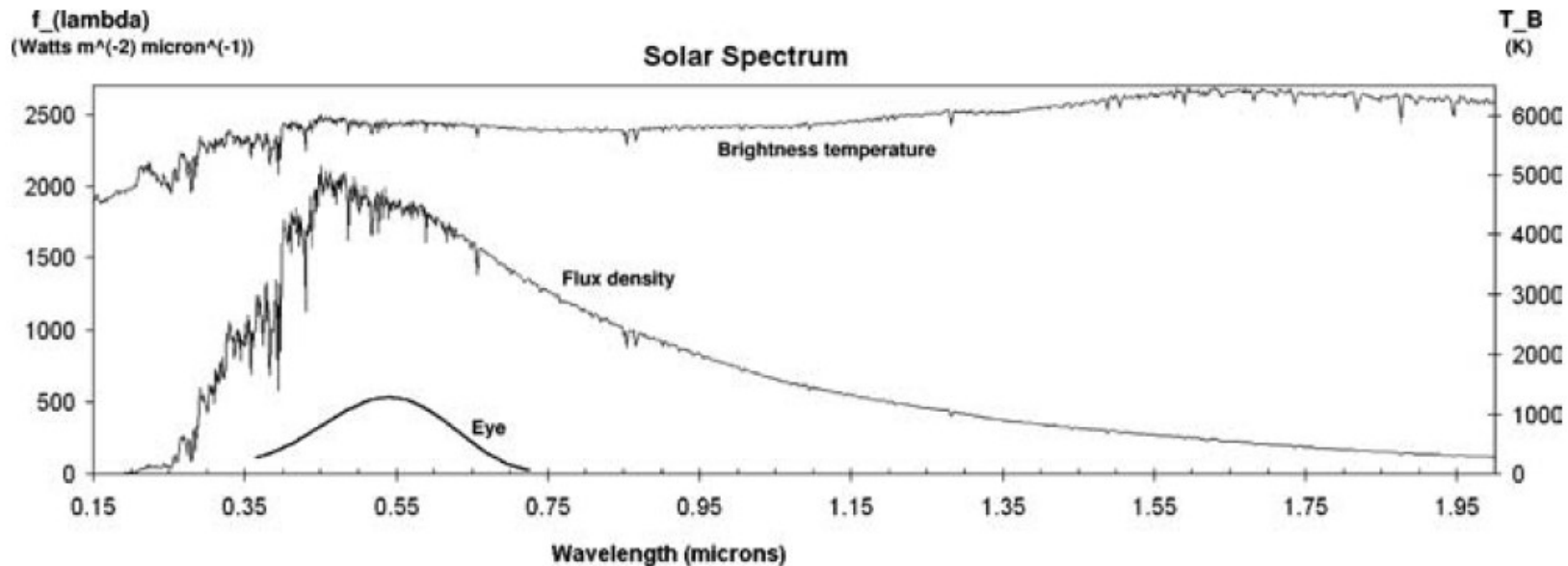
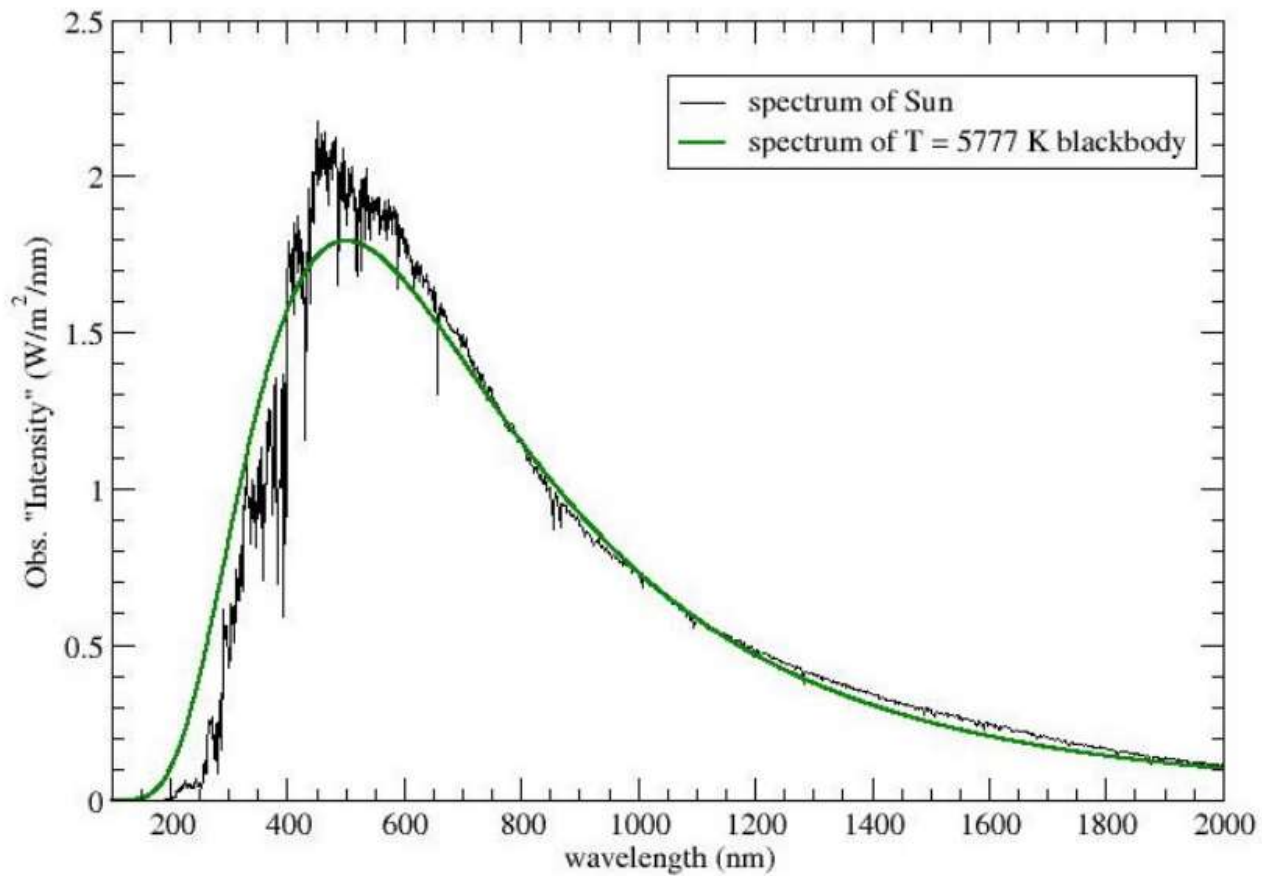


Figure 4.5. The Solar spectrum is again shown (middle curve, left scale) using the same data as in Figure 4.4 except over a more restricted wavelength range and on a linear scale. The brightness temperature (top curve, right scale) is also shown, derived by dividing the flux density by Ω_{\odot} (Eq. 1.13) and then using the Planck formula (the wavelength form of Eq. 4.4) to recover T_B . The bottom curve, in arbitrary units, is the daylight photon flux response of the human eye smoothed to 30 nm resolution (see also Figure 2.1). (Eye response reproduced by permission of James T. Fulton, 2005, www.sightresearch.net/luminouseffic.htm)

Εικόνα από βιβλίο J. Irwin, *Astrophysics, Decoding the Cosmos*



The Sun's spectrum is a good match to the spectrum of a blackbody of temperature $T = 5777$ K (in green).
(<http://homepages.wmich.edu/~korista/phys325.html>)

Θερμοκρασία Χρώματος – Colour Temperature

- Συχνά η ροή ακτινοβολίας που μετράμε συναρτήσει της συχνότητας (ή του μήκους κύματος) έχει το σχήμα περίπου BB.
- Ακόμα και αν δεν ξέρουμε την απόσταση της πηγής (και το μέγεθός της), μπορούμε να προσαρμόσουμε την κατανομή με μία συνάρτηση BB. Ή απλά να δούμε σε ποιο μήκος κύματος έχουμε μέγιστο και να προσδιορίσουμε την τιμή της θερμοκρασίας από το νόμο μετατόπισης του Wien.
- Αυτή είναι η λεγόμενη **θερμοκρασία χρώματος** (βλ. εργαστήριο εισαγωγής την αστροφυσική)

Ενεργός Θερμοκρασία – Effective Temperature T_{eff}

$$F = \int \cos \theta I_{\nu} d\nu d\Omega \equiv \sigma T_{\text{eff}}^4$$

Η ενεργός θερμοκρασία προκύπτει από τη συνολική ροή F που εκπέμπεται στη πηγή, ολοκληρωμένη σε όλες τις συχνότητες.

Προσοχή: Για τη θερμοκρασία χρώματος χρειαζόμαστε μόνο το σχήμα του φάσματος, όχι το F . Ενώ για την ενεργό θερμοκρασία χρειάζεται να ξέρουμε την ροή στην πηγή (F), άρα χρειαζόμαστε την απόσταση της πηγής.

Παράρτημα

Θερμική ακτινοβολία, ιδιότητες της συνάρτησης Planck –
γνωστά από την Εισαγωγή στην Αστροφυσική

Διαφάνειες για επανάληψη

Θερμική ακτινοβολία

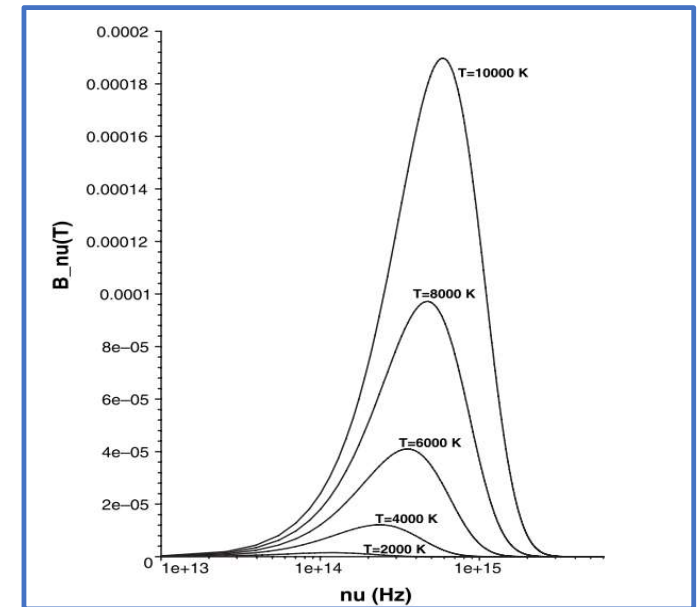
- Θερμική ακτινοβολία είναι η ακτινοβολία που εκπέμπεται από ύλη σε θερμοδυναμική ισορροπία.
- νόμος του *Kirchhoff* $j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T)$ ή $S_\nu = B_\nu(T)$, όπου B_ν η συνάρτηση Planck

$$B_\nu(T) = \frac{2h^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}$$

- $\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \alpha_\nu B_\nu(T)$ ή $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T)$

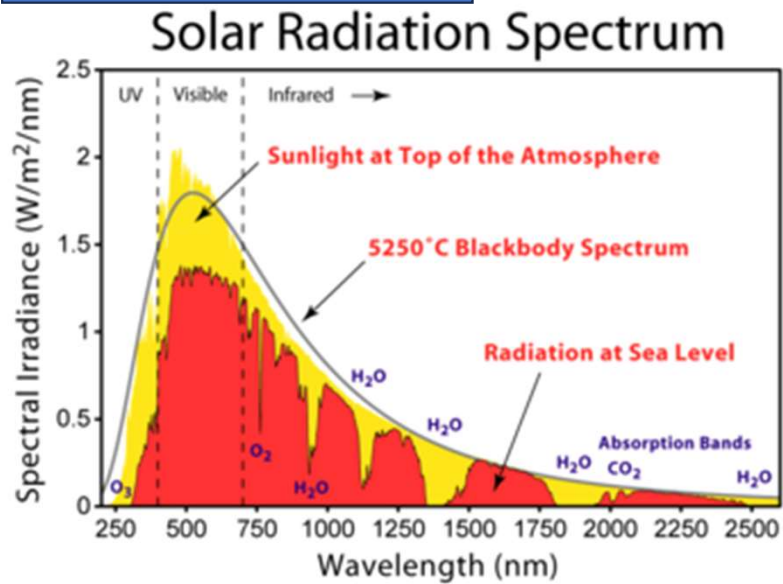
Αν το $\tau \gg 1$ τότε είδαμε ότι $I_\nu \approx S_\nu = B_\nu(T)$

Αν το τ δεν είναι πολύ μεγάλο, αλλά έχω πάλι Θ.Ι., τότε $I_\nu(\tau_\nu) \approx B_\nu(1 - e^{-\tau_\nu})$ (για $I_\nu(0) = 0$)

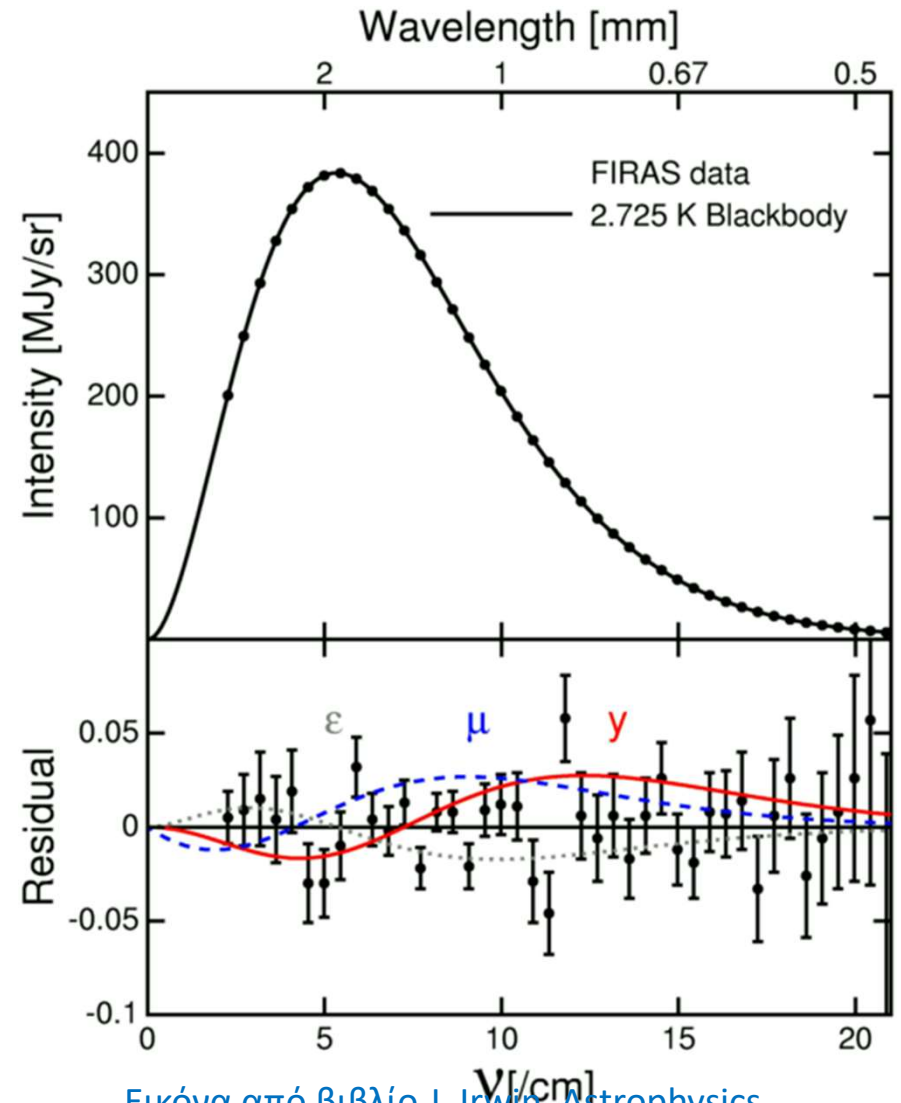


Blackbody radiation $I_\nu = B_\nu$
Thermal radiation $S_\nu = B_\nu$

Γνωστά από Εισαγωγή
στην Αστροφυσική και Φ4



https://en.wikipedia.org/wiki/File:Solar_spectrum_en.svg



Εικόνα από βιβλίο J. Irwin, *Astrophysics, Decoding the Cosmos*

Ιδιότητες της συνάρτησης Planck $B_\nu(T)$

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}$$

1. $h\nu \ll kT$ πολύ μικρό $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \cong 1 + \frac{h\nu}{kT} + \dots$, οπότε

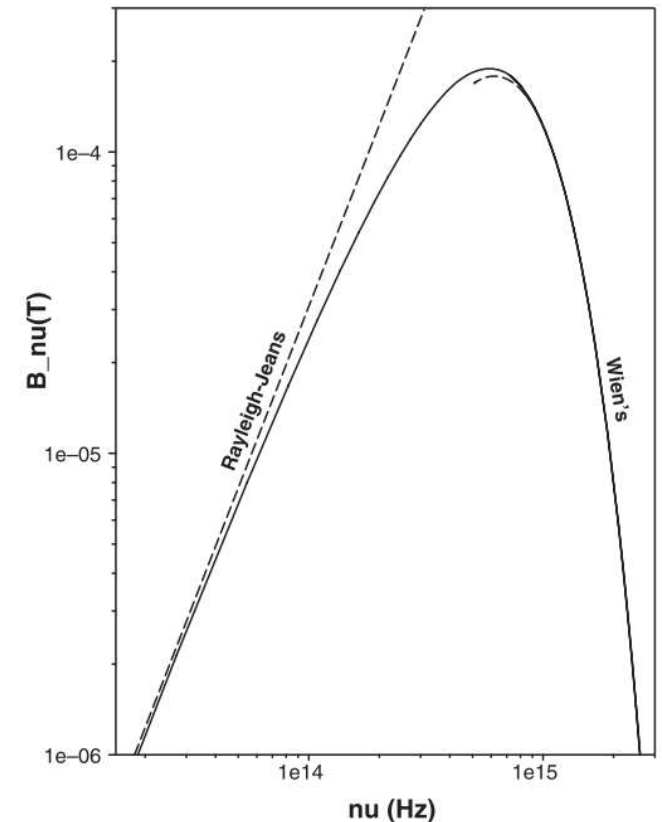
$$B_\nu(T) \cong \frac{\frac{2h\nu^3}{c^2}}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} = \frac{2\nu^2 kT}{c^2} \text{ (Rayleigh-Jeans law)}$$

οπότε αν βάλουμε σε λογαριθμική κλίμακα τα B_ν και ν , θα πάρουμε ευθείες με κλίση 2 και σημείο τομής με τον άξονα που εξαρτάται από το T .

Παρατηρείστε ότι αν ίσχυε αυτή η σχέση για όλες τις συχνότητες η συνολική ενέργεια θα ήταν

$$\propto \int \nu^2 d\nu \rightarrow \infty \text{ UV catastrophe}$$

Η προσέγγιση Rayleigh-Jeans ισχύει στις ραδιοφωνικές συχνότητες



Μονάδες CGS. $T=10000\text{K}$

Ιδιότητες της συνάρτησης Planck $B_\nu(T)$

$$B_\nu(T) = \frac{2h^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}$$

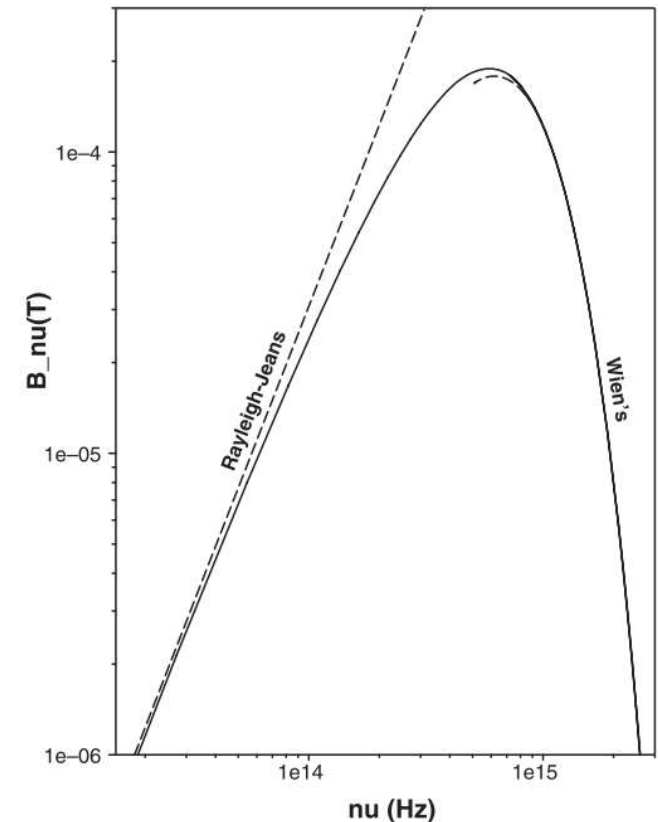
$$2. \ h\nu \gg kT \quad B_\nu(T) \cong \left(\frac{2h^3}{c^2}\right)\exp(-h\nu/kT)$$

(Wien approximation)

Αυτή η προσέγγιση πρώτα προτάθηκε από τον Wien, που βασίστηκε σε διάφορες υποθέσεις.

Η ένταση της ακτινοβολίας BB μειώνεται πολύ γρήγορα με την αύξηση της συχνότητας μετά από το μέγιστο.

Γνωστά από Εισαγωγή
στην Αστροφυσική και Φ4



Μονάδες CGS. T=10000K

Ιδιότητες της συνάρτησης Planck B_ν

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}$$

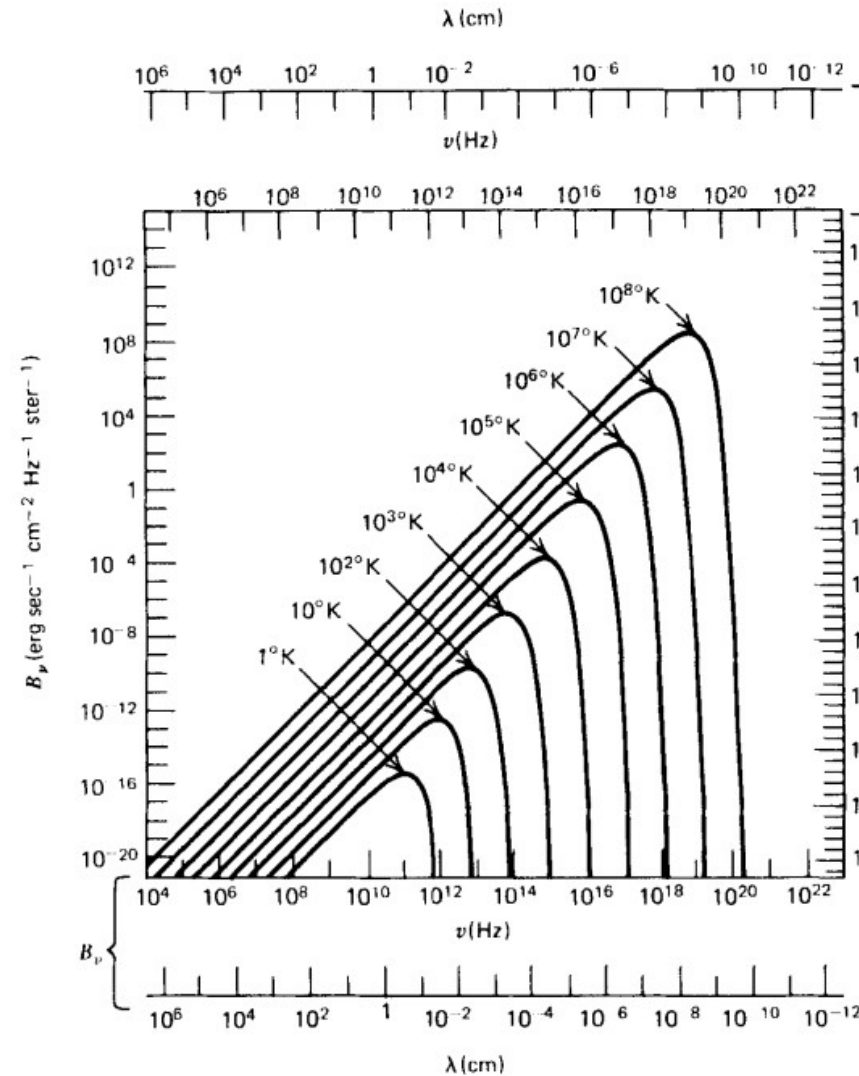
3. Μονοτονικότητα

Αν $T_1 > T_2$, τότε $B_\nu(T_1) > B_\nu(T_2)$ για κάθε ν
(σημ. δεν υπάρχουν σημεία τομής)

$$\text{Πράγματι } \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} = \frac{2h^2\nu^4}{c^2kT^2} \frac{\exp(h\nu/kT)}{[\exp(h\nu/kT)-1]^2} > 0$$

Επίσης $B_\nu \rightarrow 0$ καθώς $T \rightarrow 0$ και
 $B_\nu \rightarrow \infty$ καθώς $T \rightarrow \infty$

Γνωστά από Εισαγωγή
στην Αστροφυσική και Φ4



Spectrum of blackbody radiation at various temperatures
from Kraus, J. D. 1966, *Radio Astronomy*, McGraw-Hill Book Company

Ιδιότητες της συνάρτησης Planck $B_\nu(T)$

Γνωστά από Εισαγωγή
στην Αστροφυσική και Φ4

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

4. Ο νόμος της μετατόπισης Wien

Η συχνότητα για την οποία η συνάρτηση $B_\nu(T)$ μεγιστοποιείται:

$$\left. \frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_{max}} = 0$$

Θέτουμε $x = h\nu_{max}/k_B T$ οπότε προκύπτει η σχέση $x = 3(1 - e^{-x})$
που επιλύεται αριθμητικά $\rightarrow x = 2.82 \Rightarrow h\nu_{max} = 2.82 k_B T$

Το μήκος κύματος στο οποίο η συνάρτηση $B_\lambda(T)$ μεγιστοποιείται:

$$\left. \frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_{max}} = 0$$

Θέτουμε $y = hc/(\lambda_{max} k_B T)$ οπότε $y = 5(1 - e^{-y}) \rightarrow$ αριθμητική λύση $y = 4.97$
 $\Rightarrow \lambda_{max} T = 0.290 \text{ cm K}$

Προσοχή $\nu_{max} \neq c/\lambda_{max}$

π.χ. αν $T = 7300 \text{ K}$ η κορυφή του B_ν είναι στα 0.7 microns , ενώ του B_λ στα 0.4 microns

Ιδιότητες της συνάρτησης Planck $B_\nu(T)$

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}$$

Γνωστά από Εισαγωγή
στην Αστροφυσική και Φ4

5. Ο νόμος του Wien

$$\int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = (2h/c^2)(kT/h)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$\text{Αλλά } \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \pi^4/15$$

$$\text{Άρα } \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2 h^3} T^4$$

Η ροή από μία επιφάνεια που εκπέμπει ομοιογενώς είναι ($B_\nu = I_\nu$ για ακτινοβολία BB, $F = \pi I$ βλ. 1^ο μάθημα, διαφάνεια 15)

$$F = \int F_\nu d\nu = \pi \int B_\nu d\nu = \frac{2\pi^5 k^4}{15^2 h^3} T^4$$

$$\text{Άρα, } F = \sigma T^4, \text{ όπου } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$$

Ιδιότητες της συνάρτησης Planck $B_\nu(T)$

$$B_\nu(T) = \frac{2h^3/c^2}{\exp(h\nu/kT)-1}$$

Γνωστά από Εισαγωγή
στην Αστροφυσική και Φ4

5. Ενεργειακή πυκνότητα μελανού σώματος $I_\nu = B_\nu$

$$u_\nu = \frac{I_\nu}{c}$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{c} \iint I_\nu d\nu d\Omega = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty I_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{4\pi}{c} \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = \mathbf{a T^4},$$

όπου

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3}$$