

Φυσική των αστέρων
Μάθημα 10
(εσωτερικό των αστέρων)
Θερμοπυρηνικές αντιδράσεις

α.ε. 2024-25

Θερμοπυρηνικές αντιδράσεις ως κύρια πηγή ενέργειας στα άστρα

Η τέταρτη εξίσωση αστρικής δομής σχετίζεται με τη παραγωγή ενέργειας ανά μονάδα μάζας:

$$\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \epsilon$$

Όπως διαπιστώσαμε από τη σύγκριση των χαρακτηριστικών χρόνων στο εσωτερικό των άστρων, οι πυρηνικές αντιδράσεις απαιτούν την κύρια πηγή ενέργειας για το μεγαλύτερο μέρος της ζωής ενός άστρου.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τις **θερμοπυρηνικές, όπως λέγονται, αντιδράσεις** που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό των άστρων.

Μερικές απλές εισαγωγικές έννοιες από τη πυρηνική φυσική

Ένας πυρήνας περιλαμβάνει Z πρωτόνια και N νετρόνια και συχνά συμβολίζεται σαν A_ZX .
όπου $A = Z + N$ (1) είναι ο λεγόμενος μαζικός αριθμός

Η μάζα ηρεμίας $m(Z, N)c^2$ ενός πυρήνα είναι μικρότερη από το άθροισμα των μαζών ηρεμίας των νουκλεονίων που περιλαμβάνει. Η διαφορά αυτή είναι η **ενέργεια σύνδεσης του πυρήνα**:

$$E_B(Z, N) = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - m(Z, N)c^2 \quad (2)$$

Συχνά χρησιμοποιούμε τον όρο «ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο, δηλ. $E_B(Z, N)/A$

Γενική περιγραφή μιας πυρηνικής αντίδρασης μεταξύ δύο πυρήνων a και X , που δίνουν δύο «προϊόντα», έστω Y και b



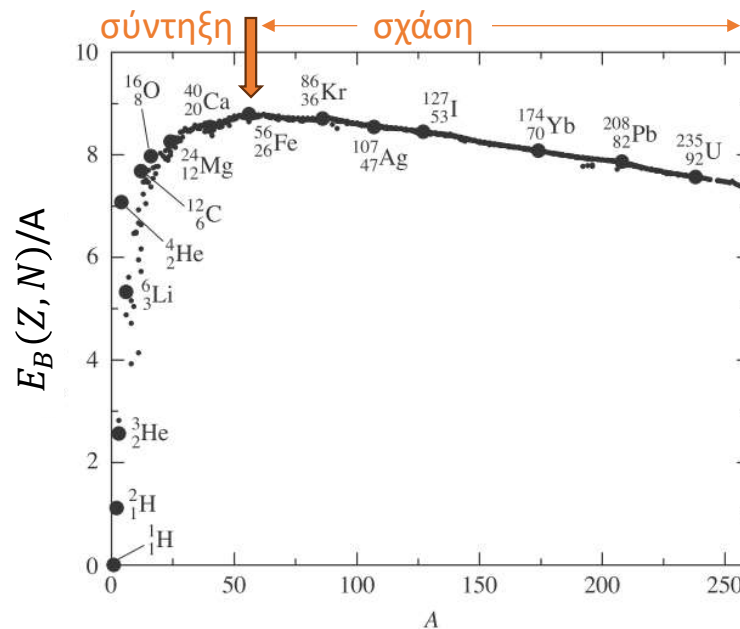
Η διατήρηση ενέργειας απαιτεί να ισχύει:

$$E_{aX} + (M_a + M_X)c^2 = E_{bY} + (M_b + M_Y)c^2 \quad (4)$$

όπου E_{aX} η κινητική ενέργεια των a και X στο σύστημα κέντρου μάζας, και E_{bY} η κινητική ενέργεια στο σύστημα κέντρου μάζας του συστήματος bY . Οι υπόλοιποι όροι είναι οι μάζες ηρεμίας των a , X , b , Y .

Η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο

$$E_B(Z, N) = Zm_p c^2 + N m_n c^2 - m(Z, N)c^2$$



Στο σχήμα δίνεται το $E_B(Z, N)/A$ ως συνάρτηση του μαζικού αριθμού A . Για κάποια A (<56) υπάρχουν πυρήνες με υπερβολικά μεγάλες τιμές του E_B/A σε σχέση με τους γείτονές τους. Π.χ. το ${}^4_2\text{He}$ και το ${}^{16}_8\text{O}$ που μαζί με το ${}^1_1\text{H}$, είναι οι πυρήνες με τη μεγαλύτερη αφθονία στο σύμπαν. Αυτή η ασυνήθιστη ευστάθεια προκύπτει από μια εγγενή δομή φλοιών του πυρήνα. Αυτοί οι ασυνήθιστα ευσταθείς πυρήνες ονομάζονται **μαγικοί πυρήνες**.

Στις πυρηνικές αντιδράσεις διατηρούνται:

✓ Το φορτίο \rightarrow για τη (3) $Z_X + Z_a = Z_Y + Z_b$ (5)

✓ Ο βαρυονικός αριθμός ($p, n, \bar{p}, \bar{n}, \dots$) \rightarrow για τη (3) $A_X + A_a = A_Y + A_b$ (6)

✓ Ο λεπτονικός αριθμός ($e^-, e^+, \nu_e, \bar{\nu}_e, \dots$) όταν στην πυρηνική αντίδραση συμμετέχουν λεπτόνια είτε ως αντιδρώντα ή/και ως προϊόντα (ασθενείς πυρηνικές αντιδράσεις)

Σημειώνουμε ότι τα σωμάτια έχουν θετικό βαρυονικό/λεπτονικό αριθμό και τα αντίστοιχα αντισωματάρια, αρνητικό.

Λόγω της διατήρησης του φορτίου μπορούμε στην εξίσωση (3) να αντικαταστήσουμε τις μάζες των πυρήνων με τις μάζες των αντίστοιχων ουδέτερων ατόμων (κάνουμε μόνο ένα μικρό λάθος λόγω διαφορών στις ενέργειες σύνδεσης των ηλεκτρονίων στα διάφορα άτομα)

Η **ενέργεια που απελευθερώνεται ($Q > 0$) από την (4)** είναι $Q = (M_a + M_X - M_b - M_Y)c^2$ (7)

Εφόσον ο βαρυονικός αριθμός διατηρείται (εξ. 6) μπορούμε επίσης να γράψουμε την (7) ως

$$Q = \Delta M_X + \Delta M_a - \Delta M_Y - \Delta M_b \quad (8)$$

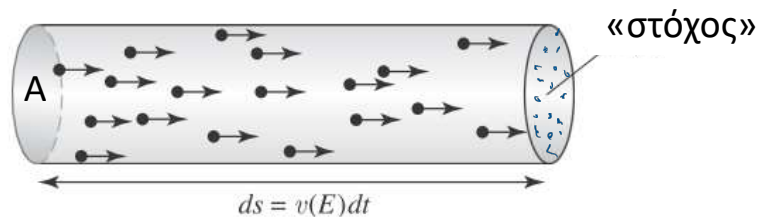
(Αν $Q < 0$ η αντίδραση είναι «ενδόθερμη»)

Ενεργός διατομή (cross section) και ρυθμός αντίδρασης (reaction rate)

Στην αντίδραση $a + X \rightarrow Y + b$, υποθέτουμε ότι τα σωματίδια X βομβαρδίζονται από σωματίδια a με συγκεκριμένη ταχύτητα v . Ο ρυθμός με τον οποίο αντιδρούν εξαρτάται από την ενεργό διατομή της αντίδρασης σ , δηλαδή:

$$\sigma = \frac{\text{αριθμος αντιδρασεων ανα πυρηνα X στη μοναδα του χρονου}}{\text{ροη προσπιπτοντων πυρηνων a στη μοναδα του χρονου}}$$

όπου η ροή προσπιπτόντων πυρήνων ορίζεται ως ο αριθμός των προσπιπτόντων πυρήνων ανά μονάδα επιφάνειας.



Εδώ υποθέσαμε ότι η ροή των σωματιδίων a οφείλεται σε ομοιόμορφη μετατόπιση με ταχύτητα v

Έστω η αριθμητική πυκνότητα των πυρήνων a είναι n_a και των πυρήνων X , n_X

Ο αριθμός των σωματιδίων a που προσπίπτουν μέσα σε χρόνο dt στον «στόχο» (πυρήνες X) είναι

$$\frac{n_a dV}{dt} = \frac{n_a A ds}{dt} = \frac{n_a A v dt}{dt} = n_a A v \text{ και η αντίστοιχη ροή (αριθμός σωματιδίων ανά μονάδα επιφάνειας) θα είναι } = n_a A v / A = n_a v$$

Ο αριθμός αντιδράσεων μεταξύ πυρήνων a και X που θα συμβούν στη μονάδα του χρόνου και στη μονάδα όγκου θα ισούται με το γινόμενο της ροής των προσπιπτόντων σωματιδίων $n_a v$ με την αριθμητική πυκνότητα των πυρήνων X , n_X , και την ενεργό διατομή σ

$$\text{δηλαδή } r_{aX} = n_a n_X v \sigma \quad (9)$$

Σε ένα μίγμα πυρήνων α και X (θεωρούμε ότι μπορούμε να τους περιγράψουμε ως μίγμα αερίων) σε Θ.Ι. υπάρχει ένα φάσμα, $\phi(v)$, σχετικών ταχυτήτων μεταξύ των σωματιδίων (πυρήνων) τύπου α και τύπου X , με $\int_0^\infty \phi(v)dv = 1$, δηλαδή η $\phi(v)$ δίνει την πιθανότητα η σχετική ταχύτητα να έχει μέτρο μεταξύ v και $v + dv$.

Οπότε μπορούμε να γράψουμε την (9) ως:

$$r_{\alpha X} = n_\alpha n_X \int_0^\infty \phi(v) \sigma(v) v dv = n_\alpha n_X \langle \sigma v \rangle$$

$$\text{όπου } \langle \sigma v \rangle = \frac{\int_0^\infty \phi(v) \sigma(v) v dv}{\int_0^\infty \phi(v) dv}$$

Τα παραπάνω ισχύουν για την περίπτωση που $\alpha \neq X$, οπότε το γινόμενο $n_\alpha n_X$ μας δίνει τον συνολικό αριθμό μοναδικών ζευγών (α, X). Αν $\alpha \equiv X$, τότε ο αριθμός των μοναδικών ζευγών θα είναι $\frac{1}{2} n_\alpha n_X$. Οπότε, για να συμπεριλάβουμε και τις δύο περιπτώσεις, γράφουμε

$$r_{\alpha X} = \frac{1}{1 + \delta_{\alpha X}} n_\alpha n_X \langle \sigma v \rangle \quad (10)$$

Για ιδανικό αέριο σε (τοπική) θερμοδυναμική ισορροπία η κατανομή $\phi(v)$ δίνεται από την κατανομή Maxwell-Boltzmann,

$$\phi(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) \quad (11) \quad (\text{απόδειξη ως άσκηση – έγινε στο μάθημα})$$

όπου $\mu = \frac{m_\alpha m_X}{m_\alpha + m_X}$ η ανηγμένη μάζα.

$$\text{οπότε } \langle \sigma v \rangle = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^3 \sigma(v) dv \quad (12)$$

Για μη σχετικιστικές ταχύτητες, μπορούμε να γράψουμε την (12) συναρτήσει της κινητικής ενέργειας στο σύστημα κέντρου μάζας, $E = \frac{1}{2}\mu v^2$

Γράφοντας την κατανομή ταχυτήτων ως κατανομή κινητικών ενεργειών στο σύστημα ΚΜ, έχουμε

$$\psi(E)dE = \phi(v)dv = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E}{kT} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \frac{dE}{(kTE)^{\frac{1}{2}}}$$

Οπότε η (12) γράφεται

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^{\infty} \sigma(E)v(E)\psi(E)dE = \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{1/2} (kT)^{-3/2} \int_0^{\infty} \sigma(E)E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE$$

Πρέπει να βρούμε το $\sigma(E)$

Πυρηνική ενεργός διατομή $\sigma(E)$

- Πως μπορούν να συμβούν οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις; Πρέπει να πλησιάσουν πολύ κοντά μεταξύ τους θετικά φορτισμένα σωματίδια.
- Στο διπλανό διάγραμμα βλέπουμε τη καμπύλη δυναμικής ενέργειας για την αλληλεπίδραση Coulomb μεταξύ δυο πρωτονίων.
- Για να συμβεί η πυρηνική σύντηξη των δύο πρωτονίων (γενικά δύο πυρήνων) πρέπει να υπερπηδηθεί το φράγμα Coulomb.

ΜΙΑ ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΣΥΖΗΤΗΣΗ:

(α) Κλασική προσέγγιση

Υποθέτουμε ότι η απαιτούμενη ενέργεια προέρχεται από τη θερμική ενέργεια του αερίου δηλ.

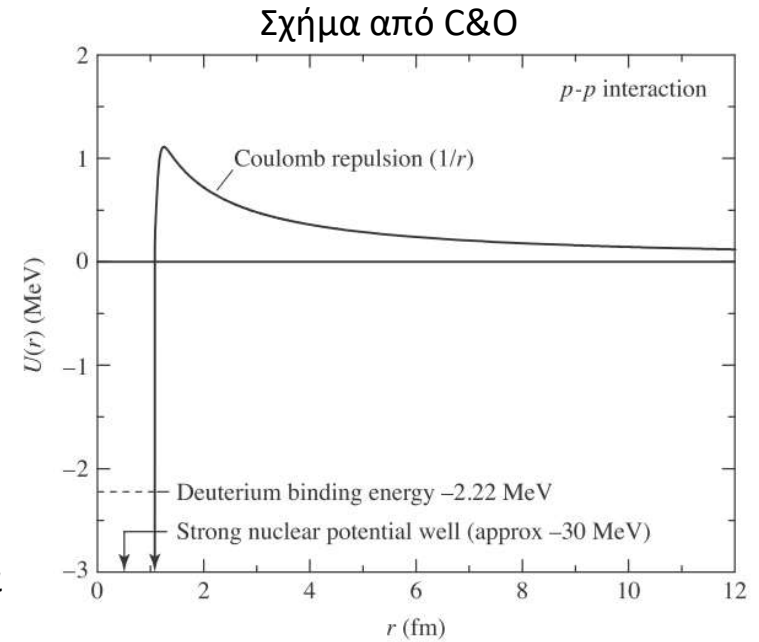
$$\frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT_{\text{classical}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (14)$$

(όπου μ η ανηγμένη μάζα του συστήματος των δυο αλληλοεπιδρώντων

πυρήνων, και v η σχετική τους ταχύτητα (για σύντηξη p-p, $\mu = \frac{m_p}{2}$ και $Z_1 = Z_2 = 1$).

$$\text{Άρα, } T_{\text{classical}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{6\pi\epsilon_0 k r} \sim 10^{10} \text{ K} \gg T_{c,\odot} = 1.5 \times 10^7 \text{ K} \quad (15)$$

όπου θέσαμε $r \sim 1 \text{ fm}$ για την ακτίνα ενός τυπικού πυρήνα.



Χαρακτηριστική καμπύλη δυναμικής ενέργειας για τις πυρηνικές αντιδράσεις. Η άπωση Coulomb ανάμεσα στους θετικά φορτισμένους πυρήνες έχει ως αποτέλεσμα ένα φράγμα το οποίο είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης ανάμεσα στους πυρήνες και ανάλογο του γινομένου των φορτίων τους. Το πυρηνικό πηγάδι δυναμικού μέσα στον πυρήνα οφείλεται στην ελκτική πυρηνική δύναμη.

(β) Κβαντομηχανική προσέγγιση

Η απροσδιοριστία στη θέση του ενός πυρήνα (p για τη σύντηξη $p-p$) που αλληλεπιδρά με έναν άλλο πυρήνα (p για τη σύντηξη $p-p$) μπορεί να είναι τόσο μεγάλη ώστε, ακόμα και αν η κινητική ενέργεια στο σύστημα Κ.Μ. δεν είναι αρκετή για να ξεπεραστεί το κλασικό φράγμα Coulomb, ο πυρήνας (το p) μπορεί, παρ' όλα αυτά να βρεθεί μέσα στο κεντρικό πηγάδι δυναμικού που ορίζεται από την ισχυρή δύναμη του άλλου πυρήνα (p) → κβαντομηχανικό φαινόμενο σήραγγας

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{p^2}{2\mu} \Rightarrow \frac{(\frac{\hbar}{\lambda})^2}{2\mu} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\lambda} \quad (16)$$

όπου p η σχετική ορμή, μ η ανηγμένη μάζα και, και $r \sim \lambda$, όπου λ το μήκος de Broglie $\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{(2mE)^{1/2}}$ (17)

για μη σχετικιστικά σωματίδια.

Λύνουμε ως προς λ τη σχέση (16), και αντικαθιστούμε το r με λ στη σχέση (15), οπότε τελικά βρίσκουμε

$$T_{\text{quantum}} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4 \mu m}{12\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 k} \cong 10^7 K \quad (\text{για } p-p) \quad (18)$$

Δηλαδή λαμβάνοντας υπόψη τη κβαντομηχανική συμπεριφορά των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων βρίσκουμε θερμοκρασίες (για $p-p$) της τάξης μεγέθους της θερμοκρασίας στο κέντρο του ήλιου.

Προσέγγιση του $\sigma(E)$ (στα πλαίσια της κβαντομηχανικής προσέγγισης)

- (i) περιμένουμε το $\sigma(E) \propto \pi \lambda^2$ (γεωμετρική ενεργος διατομή) $\cong \pi \left(\frac{\hbar}{p}\right)^2 \propto \frac{1}{E}$ ($E = \frac{p^2}{2\mu}$, μη σχετικ.)
- (ii) Επίσης περιμένουμε (αποδεικνύεται αυστηρά) ότι η πιθανότητα να διαπεράσει το σωματίδιο το φράγμα Coulomb, U_c , θα σχετίζεται με το λόγο του E/U_c .

[αν το $U_c=0$ η πιθανότητα να ξεπεραστεί το φράγμα είναι προφανώς 1, ενώ αν το U_c τείνει στο άπειρο, η πιθανότητα τείνει εκθετικά στο 0.]

Αποδεικνύεται ότι $\sigma(E) \propto e^{-2\pi^2 U_c/E}$

$$\text{όπου } \frac{U_c}{E} = \frac{Z_1 Z_2 e^2 / 4\pi\epsilon_0 r}{\frac{p^2}{2\mu}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\epsilon_0 h v} \quad (\text{όπου πήραμε } r \sim \lambda = \frac{h}{p}, p = \mu v)$$

Δηλαδή:

$$\sigma(E) \propto e^{-bE^{-1/2}} \quad \text{με } b \equiv \frac{\pi\mu^{1/2} Z_1 Z_2 e^2}{2^{1/2}\epsilon_0 h} \quad (\text{να αποδειχθεί ως άσκηση})$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε το $\sigma(E)$ ως:

$$\sigma(E) = S(E)E^{-1}e^{-2\pi^2 U_c/E} \quad \text{οπότε } \langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\mu\pi}\right)^{1/2} (kT)^{-3/2} \int_0^\infty \sigma(E)E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE \quad \text{και}$$

$$r_{\alpha X} = \frac{1}{1+\delta_{\alpha X}} n_\alpha n_X \langle \sigma v \rangle = \left(\frac{2}{kT}\right)^{3/2} \frac{1}{1+\delta_{\alpha X}} \frac{n_\alpha n_X}{(\mu\pi)^{1/2}} \int_0^\infty S(E)e^{-bE^{-1/2}} e^{-E/kT} dE$$

όπου υποθέτουμε ότι η $S(E)$ («astrophysical S factor») περιλαμβάνει όλες τις εξαρτήσεις από τη δομή των πυρήνων.

Gamow peak

Ας μελετήσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} S(E)e^{-bE^{-1/2}}e^{-E/kT} dE$

Ας υποθέσουμε ότι το $S(E)$ είναι περίπου σταθερό για την περιοχή ενεργειών που μας ενδιαφέρουν (αυτό γενικά μπορούμε να το υποθέσουμε όταν η E είναι μακριά από συντονισμούς).

Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\int_0^{\infty} S(E)e^{-bE^{-1/2}}e^{-E/kT} dE \cong S(E_0) \int_0^{\infty} e^{-(bE^{-1/2} + \frac{E}{kT})} dE$$

Παρατηρείστε ότι η $e^{-E/kT}$ τείνει γρήγορα στο μηδέν για μεγάλα E , ενώ η $e^{-bE^{-1/2}}$ τείνει γρήγορα το μηδέν για μικρές ενέργειες. Οπότε η μεγαλύτερη συνεισφορά στο ολοκλήρωμα θα είναι για τιμές του E

που είναι κοντά στο μέγιστο της συνάρτησης $f(E) = e^{-(bE^{-1/2} + \frac{E}{kT})}$

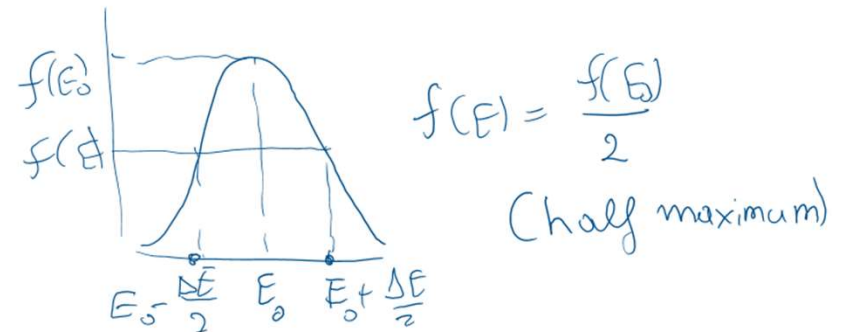
Το μέγιστο της συνάρτησης αυτής συμβαίνει όταν $\frac{d(bE^{-1/2} + \frac{E}{kT})}{dE} = 0 \Rightarrow \frac{1}{kT} - \frac{1}{2}bE_0^{-3/2} = 0 \Rightarrow$

$$E_0 = \left(\frac{bkT}{2}\right)^{3/2} \rightarrow \text{κορυφή Gamow}$$

(Αποδεικνύεται ότι...) Μπορούμε να προσεγγίσουμε την $f(E)$ με μία γκαουσιανή συνάρτηση της μορφής

$$f(E) \approx f(E_0) \exp \left[- \left(\frac{E - E_0}{\Delta E} \right)^2 \right],$$

όπου $f(E_0) = e^{-(bE_0^{-1/2} + E_0/kT)} = e^{-(3E_0/kT)}$ (ελέγξτε το)



Εύρεση του ΔE

$$f(E) = f(E_0) + f'(E_0)(E - E_0) + \frac{1}{2} f''(E_0)(E - E_0)^2 + \dots$$

$$f(E) = \frac{f(E_0)}{2} = f(E_0) + \frac{1}{2} f''(E_0)(E - E_0)^2 \Rightarrow$$

$$-\frac{f(E_0)}{2} = \frac{1}{2} f''(E_0)(E - E_0)^2 \Rightarrow E - E_0 = - \left(\frac{f}{f''} \right)_{E=E_0}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \Delta E = 2(E - E_0) = \left(\frac{4E_0 kT}{3} \right)^{1/2} \text{ (ελέγξτε το)}$$

Οπότε

$$\int_0^{\infty} f(E) dE \approx e^{-\left(\frac{3E_0}{kT}\right)} \int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{E-E_0}{\Delta E}\right)^2\right] dE \approx e^{-\left(\frac{3E_0}{kT}\right)} \sqrt{\pi} \Delta E \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} f(E) dE \approx \sqrt{\pi} e^{-\left(\frac{3E_0}{kT}\right)} \left(\frac{4E_0 kT}{3}\right)^{1/2}, \text{ όπου } E_0 = \left(\frac{bkT}{2}\right)^{3/2}$$

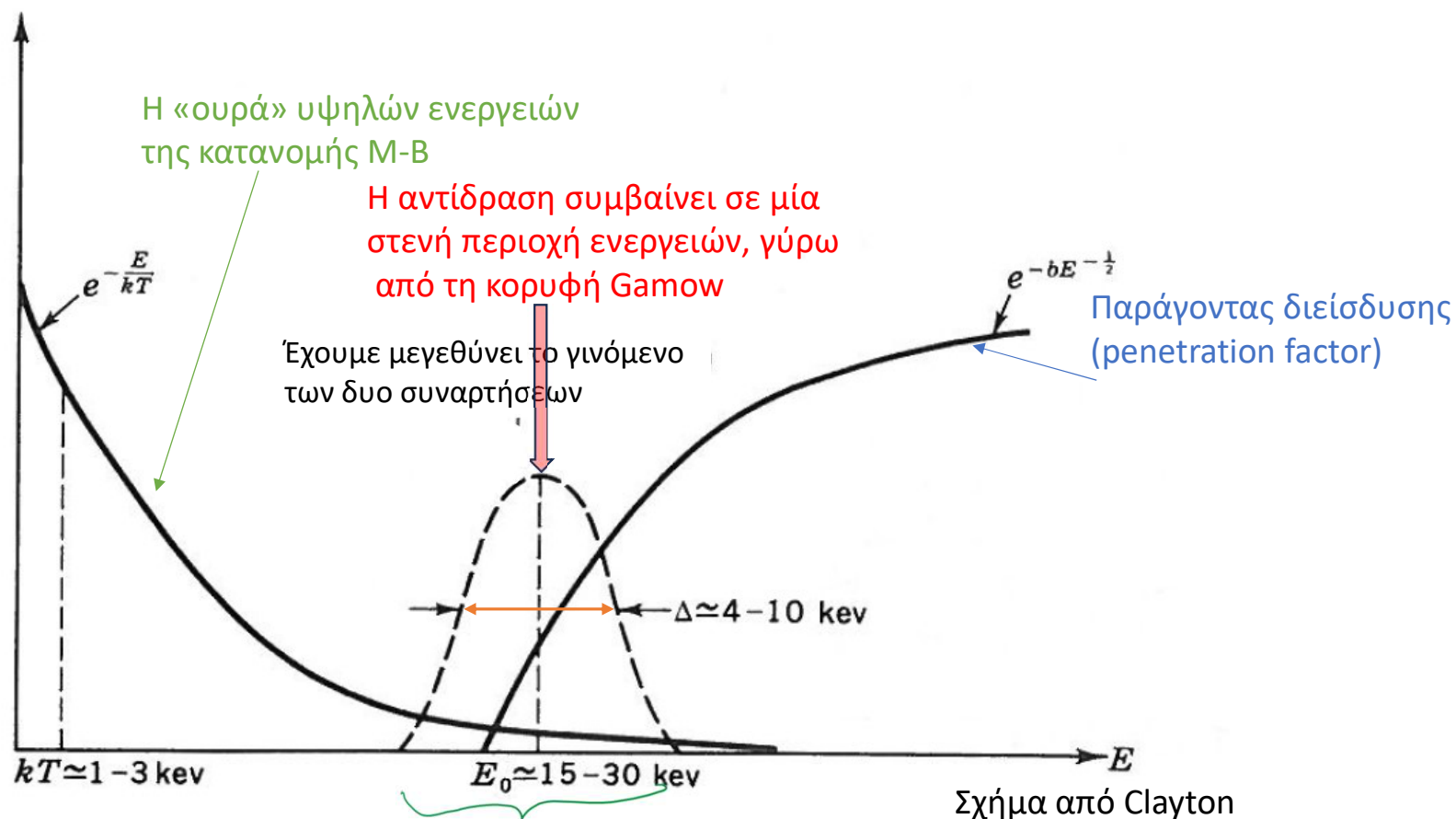
Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις καταλήγουμε στο ότι **(κάνετε τις πράξεις!)**

$\langle \sigma v \rangle \propto \frac{1}{T^{2/3}} \exp\left(-\frac{C}{T^{1/3}}\right)$, όπου το C εξαρτάται από το γινόμενο των φορτίων των δύο πυρήνων που αλληλεπιδρούν (άρα από το ύψος του φράγματος Coulomb).

Συνήθως η σχέση αυτή προσεγγίζεται (για θερμοκρασίες κοντά στη T_0) από την

$$\langle \sigma v \rangle = \langle \sigma v \rangle_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\nu} \text{ (άσκηση)}$$

Gamow peak



Συνήθως παίρνουμε $S(E) \sim S(E_0) \sim \text{σταθερό}$ (όταν είμαστε μακριά από συντονισμούς)

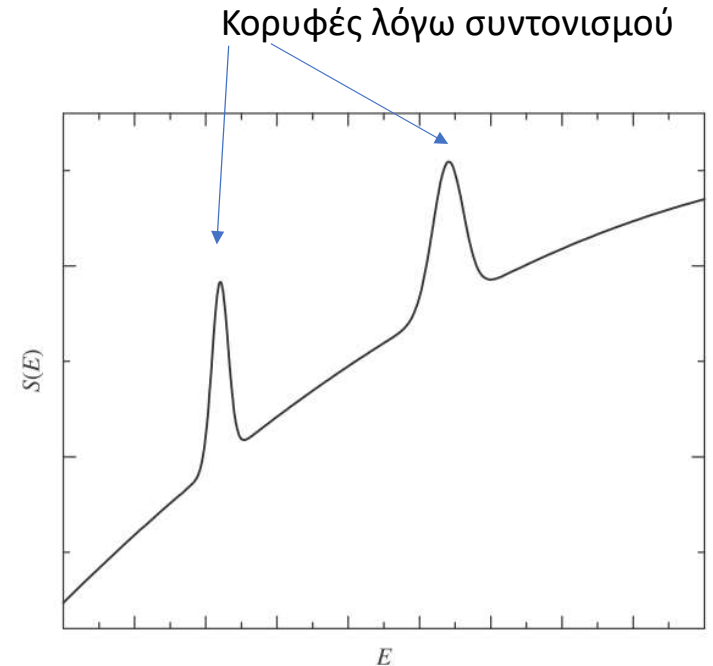
Σχόλια

- Έχουμε υποθέσει ότι η $S(E)$ μεταβάλλεται αργά με την E , ιδίως γύρω από την κορυφή Gamow. Υπάρχουν όμως χαρακτηριστικές ενέργειες (που αντιστοιχούν σε ενεργειακές διαφορές μεταξύ διακριτών σταθμών του πυρήνα → μοντέλο φλοιών) για τις οποίες το $S(E)$ δεν είναι σταθερό, αλλά έχει ισχυρές κορυφές συντονισμού.
- Θωράκιση ηλεκτρονίων (electron screening): το φράγμα Coulomb υποβιβάζεται λόγω της παρουσίας διάχυτων ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα, οπότε

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} + U_s(r)$$

< 0

Διόρθωση λόγω
θωράκισης από ηλεκτρόνια



➤ Ο παράγοντας $S(E)$ μπορεί, κατ' αρχήν, να υπολογιστεί θεωρητικά, αλλά στην πράξη ο προσδιορισμός του βασίζεται σε εργαστηριακές μετρήσεις της ενεργού διατομής.

Το πρόβλημα είναι ότι τέτοιες μετρήσεις είναι εφικτές μόνο σε υψηλές ενέργειες, συνήθως $> 0.1 \text{ MeV}$, καθώς για μικρότερες ενέργειες η ενεργός διατομή είναι πολύ μικρή και καθίσταται μη μετρήσιμη στο εργαστήριο. Επομένως, απαιτείται παρεκβολή (extrapolation) του $S(E)$ από ψηλότερες σε χαμηλότερες (για $>$ μία τάξη μεγέθους) ενέργειες.

Υπολογισμός της παραγόμενης ενέργειας

Για να υπολογίσουμε την ενέργεια που παράγεται στη μονάδα του χρόνου από στοιχειώδη μάζα dm του αστρικού υλικού, πρέπει να πολ/σουμε το $r_{\alpha X}$ (αντιδράσεις/στοιχειώδη όγκο/χρόνο) με τον στοιχειώδη όγκο dV και με την ενέργεια ανά αντίδραση $\varepsilon = Q_{\alpha X}$.

Η ισχύς (φωτεινότητα – luminosity) που παράγεται από τη μάζα dm είναι

$$dL = \varepsilon r_{\alpha X} dV \Rightarrow \frac{dL}{dm} = \frac{\varepsilon r_{\alpha X}}{dm/dV} = \frac{\varepsilon r_{\alpha X}}{\rho} \equiv \varepsilon_{\alpha X} \text{ (erg/s/g)}$$

Για να βρούμε το $\frac{dL}{dm}$ πρέπει να αθροίσουμε τα $\varepsilon_{\alpha X}$ για όλες τις πιθανές αντιδράσεις.

$$\varepsilon_{nuc} = \sum_{\alpha, X} \varepsilon_{\alpha X}$$

Έτσι παίρνουμε τον συνολικό ρυθμό παραγωγής ενέργειας από πυρηνικές αντιδράσεις ανά μονάδα μάζας.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $r_{\alpha X} = \frac{1}{1+\delta_{\alpha X}} n_{\alpha} n_X \langle \sigma v \rangle$ παίρνουμε

$$\varepsilon_{\alpha X} = \frac{Q_{\alpha X}}{\rho} \frac{1}{1+\delta_{\alpha X}} n_{\alpha} n_X \langle \sigma v \rangle$$

Αλλά $n_i = \frac{X_i \rho}{A_i m_H}$ (όπου X_i η μάζα του στοιχείου i προς τη συνολική μάζα, και A_i ο μαζικός αριθμός του στοιχείου i)

[Πράγματι: $n_i = \frac{N_i}{V} = \frac{N_i/m_*}{V/m_*} = \rho \frac{N_i}{m_*} = \rho \frac{N_i A_i m_H}{m_* A_i m_H} = \rho \frac{m_i}{m_* A_i m_H} = \frac{X_i \rho}{A_i m_H}$, όπου m_* η συνολική μάζα (όλων των στοιχείων που συναποτελούν τη στοιχειώδη μάζα που παράγει την ισχύ dL), m_i η συνολική μάζα του στοιχείου i (μέσα στην ίδια στοιχειώδη μάζα που παράγει την ισχύ dL), $\rho = \frac{m_*}{V}$ και $X_i = \frac{m_i}{m_*}$]

$$\text{Οπότε } \varepsilon_{\alpha X} = \frac{Q_{\alpha X}}{(1+\delta_{\alpha X}) A_{\alpha} A_X m_H^2} \rho X_{\alpha} X_X \langle \sigma v \rangle_{\alpha X}$$

$$\text{Θυμόμαστε ότι } \langle \sigma v \rangle = \langle \sigma v \rangle_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\nu}$$

Άρα, μπορούμε να γράψουμε ότι

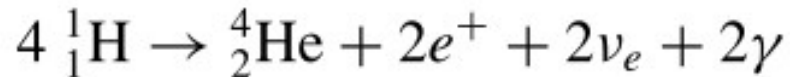
$$r_{\alpha X} \simeq r_0 X_{\alpha} X_X \rho^2 T^{\nu} \text{ και } \varepsilon_{\alpha X} = \varepsilon'_0 X_{\alpha} X_X \rho T^{\nu}$$

Table 6.1. Atomic masses of several important isotopes.

element	Z	A	M/m_u	element	Z	A	M/m_u	element	Z	A	M/m_u
n	0	1	1.008665	C	6	12	12.000000	Ne	10	20	19.992441
H	1	1	1.007825		6	13	13.003354	Mg	12	24	23.985043
	1	2	2.014101	N	7	13	13.005738	Si	14	28	27.976930
He	2	3	3.016029		7	14	14.003074	Fe	26	56	55.934940
	2	4	4.002603		7	15	15.000108	Ni	28	56	55.942139
Li	3	6	6.015124	O	8	15	15.003070				
	3	7	7.016003		8	16	15.994915				
Be	4	7	7.016928		8	17	16.999133				
	4	8	8.005308		8	18	17.999160				

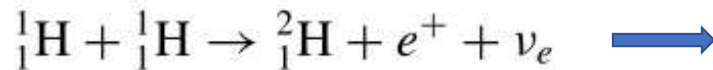
Σύντηξη υδρογόνου: Αλυσίδες pp

Περιλαμβάνουν αντιδράσεις που συνολικά περιγράφονται από την:

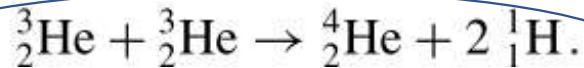
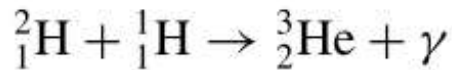


Αλυσίδα ppI

69%

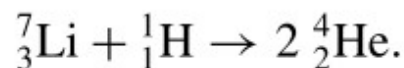
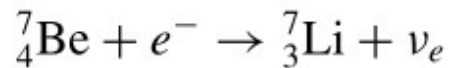
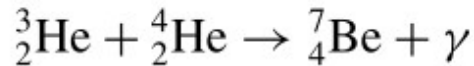


Ασθενής αλληλεπίδραση –
πολύ αργή → καθορίζει το
συνολικό r_{ix}



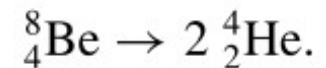
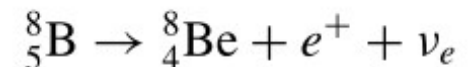
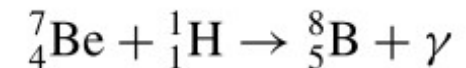
Αλυσίδα ppII

31%



Αλυσίδα ppIII

0.3%



Το συνολικό ϵ από την αλυσίδα pp υπολογίζεται ότι είναι:

$$\epsilon_{pp} = 0.241 \rho X^2 f_{pp} \psi_{pp} C_{pp} T_6^{-2/3} e^{-3.80 T_6^{-1/3}} \text{Wkg}^{-1}$$

(όπου f_{pp} ο παράγοντας θωράκισης, $\psi_{pp} \sim 1$ είναι ένας παράγοντας διόρθωσης, ο οποίος έχει να κάνει με την ταυτόχρονη ύπαρξη των PP I, PP II και PP III και $C_{pp} \sim 1$ περιλαμβάνει διορθωτικούς όρους ανώτερης τάξης. Επίσης, $T_6 \equiv \frac{T}{10^6 \text{K}}$).

Κοντά στη θερμοκρασία $T = 1.5 \times 10^7 \text{K}$

$$\epsilon_{pp} \simeq \epsilon'_{0,pp} \rho X^2 f_{pp} \psi_{pp} C_{pp} T_6^4 \text{ με } \epsilon'_{0,pp} = 1.08 \times 10^{-12} \text{Wm}^3 \text{kg}^{-2}$$

Προσέξτε τη σχετικά ασθενή (σε σύγκριση με άλλες αντιδράσεις που θα δούμε αργότερα) εξάρτηση από τη T .

Σύντηξη Η: Κύκλος CNO

Οι πυρήνες CNO δρουν σαν «καταλύτες».

Ο κύκλος μπορεί να ξεκινήσει από οπουδήποτε ανάλογα με τον διαθέσιμο πυρήνα .

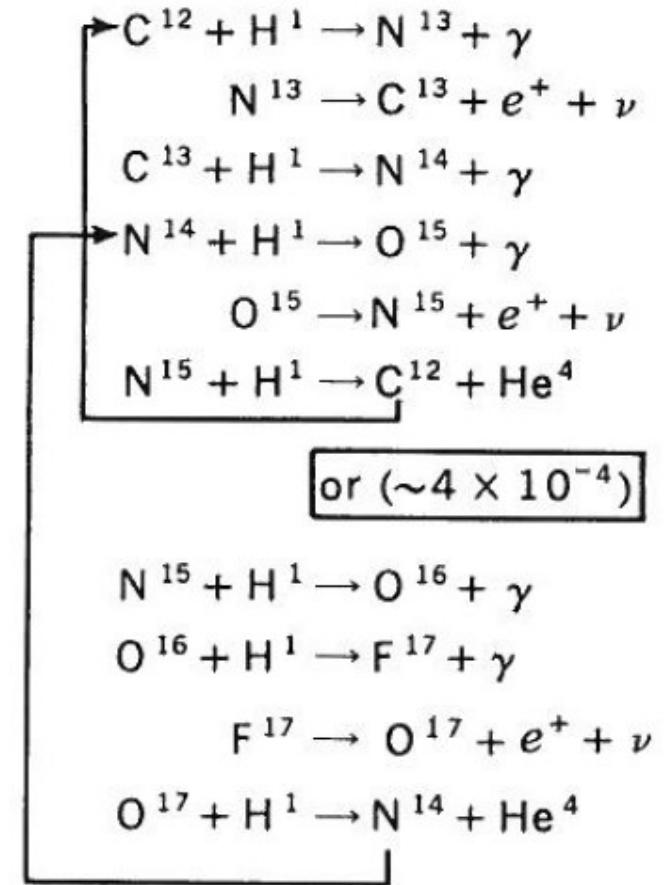
Παρατηρείστε ότι οι πυρήνες CNO ανακτώνται στο τέλος, αλλά αλλάζει ο λόγος ισοτόπων ($^{14}\text{N}/^{15}\text{N}$)

$$\varepsilon_{\text{CNO}} = 8.67 \times 10^{20} \rho X X_{\text{CNO}} C_{\text{CNO}} T_6^{-2/3} e^{-152.28 T_6^{-1/3}} \text{Wkg}^{-1}$$

Γύρω από τη θερμοκρασία $T = 1.5 \times 10^7 \text{K}$

$$\varepsilon_{\text{CNO}} \simeq \varepsilon'_{0,\text{CNO}} \rho X X_{\text{CNO}} T_6^{19.9}$$

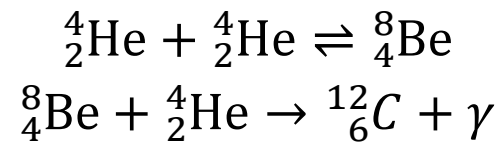
$$\text{με } \varepsilon'_{0,\text{CNO}} = 8.24 \times 10^{-31} \text{Wm}^3 \text{kg}^{-2}$$



Σύντηξη He: Η αντίδραση 3α

Καθώς αλλάζει η σύσταση του πυρήνα ($H \rightarrow He$), αυξάνεται το μέσο μοριακό βάρος μ . Οπότε, από την καταστατική εξίσωση ιδανικού αερίου προκύπτει ότι μειώνεται η πίεση (για T και ρ σταθερά), οπότε χάνεται η υδροστατική ισορροπία και ο πυρήνας καταρρέει, οδηγώντας σε αύξηση της θερμοκρασίας \rightarrow καύση ηλίου σε άνθρακα

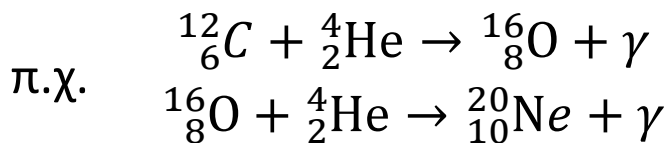
Η αλυσίδα αντιδράσεων με την οποία το ήλιο συντήκεται σε άνθρακα, είναι η λεγόμενη αντίδραση 3α:



$$\text{με } \epsilon_{3\alpha} = 50.9 \rho^2 Y^3 T_8^{-3} f_{3\alpha} e^{-4.027 T_8^{-1}} \text{ W kg}^{-1}$$

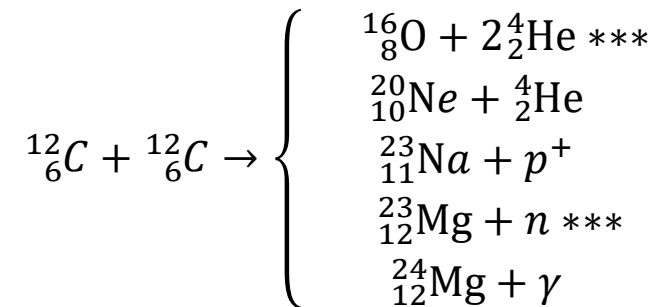
Γύρω από τη θερμοκρασία $T=10^8\text{K}$: $\epsilon_{3\alpha} \simeq \epsilon'_{0,3\alpha} \rho^2 Y^3 f_{3\alpha} T_8^{4.10}$ (όπου $T_8 \equiv \frac{T}{10^8\text{K}}$)

Εκτός από την διαδικασία 3α συμβαίνουν και άλλες πυρηνικές αντιδράσεις σε παρόμοιες θερμοκρασίες.



Σύνθεση βαρύτερων πυρήνων

Σε ακόμα μεγαλύτερες θερμοκρασίες ($T \cong 6 \times 10^8 \text{K}$), αρχίζει η σύντηξη του άνθρακα:



***: ενδόθερμη αντίδραση

Σε ακόμα μεγαλύτερες θερμοκρασίες ($T \cong 10^9 \text{K}$),

