Σύντομες απαντήσεις στις ασκήσεις της 2ης εργασίας 2024-25

$\boxed{3}$ (ασκ. 13.6 & 13.7 από αγγλική έκδοση C&O)

(α) Αύξηση της φωτεινότητας L συνδέεται με αυξημένη πίεση ακτινοβολίας που αναμένουμε να αυξάνει τον ρυθμό απώλειας μάζας.
Μια μείωση στην επιφανειακή επιτάχυνση βαρύτητας g σημαίνει ότι το υλικό στην επιφάνεια του άστρου είναι λιγότερο βαρυτικά δεσμευμένο στο άστρο, οπότε περιμένουμε να αυξάνεται το $\dot{M}$.
Καθώς το R μειώνεται, κρατώντας τα L και g σταθερά, μειώνεται η επιφανειακή ροή, μειώνοντας την επίδραση της πίεσης ακτινοβολίας.

(β) Για $L = 7\times10^3 L_\odot$, $T_e = 3000K$, $M = 1M_\odot$

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \Rightarrow R = \left[L/4\pi\sigma T_e^4\right]^{1/2} = 310 R_\odot$$

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow g/g_\odot = \frac{M}{M_\odot}\left(\frac{R_\odot}{R}\right)^2 = \frac{1M_\odot}{M_\odot}\left(\frac{1}{310}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g}{g_\odot} \approx 1{,}04\times10^{-5}$$

Υποθέτουμε ότι $\eta \approx 1$, οπότε από τον τύπο

$$\dot{M} = -4\times10^{-13}\,\eta\,\frac{L}{gR}\ (M_\odot yr^{-1}) \quad (1)$$ (L, g και R σε ηλιακές μονάδες)

$$\Rightarrow \dot{M} = -4\times10^{-13}\cdot 1 \cdot \frac{7\times10^3}{1{,}04\times10^{-5}\times3{,}1\times10^2}\ M_\odot yr^{-1} = -8{,}7\times10^{-7}\ M_\odot yr^{-1}$$

(γ) $\frac{g}{g_\odot} = \frac{M/M_\odot}{(R/R_\odot)^2}$, οπότε η εξ. (1) γίνεται

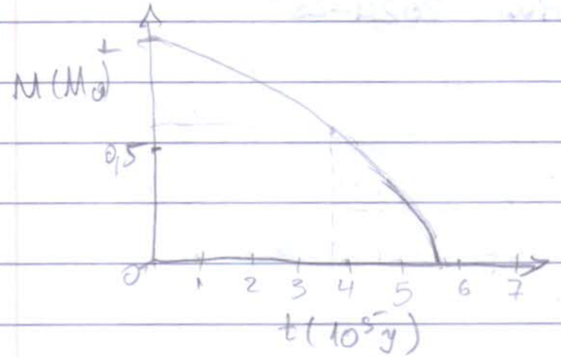
$$\dot{M} = \underbrace{-4\times10^{-13}\eta}_{\text{σταθερά έστω } C}\ \frac{LR}{M}\ M_\odot yr^{-1}$$, όπου L, R, M σε ηλιακές μονάδες $L_\odot$, $R_\odot$, $M_\odot$

$$\dot{M} = -C\frac{LR}{M} \Rightarrow M\dot{M} = -CLR \quad (2)$$

Υποθέτοντας ότι R, L σταθερά, $(2) \Rightarrow M\,dM = -CLR\,dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow M^2 - M_0^2 = -2CLRt \Rightarrow M = (M_0^2 - 2CLRt)^{1/2}$$

όπου M_0 η μάζα στην αρχή της φάσης του ΑΚΓ,



Για $M_0 = 1 M_\odot$, $M = 0{,}0 M_\odot$, $\Rightarrow$ $t = 3{,}7\times10^5\,y$

$\boxed{4}$ (15.1 & 15.2 από αγγλική έκδοση CaO)

(α) η Car $M \approx 120 M_\odot$

$$L_{Edd} = \frac{4\pi G c}{\bar{\kappa}} M$$

Τα άστρο η Car είναι αρκετά θερμό (~40000K), οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το υλικό (κυρίως H) στην ατμόσφαιρα είναι ιονισμένο σε μεγάλο βαθμό, οπότε η αδιαφάνεια οφείλεται κυρίως στην σκέδαση (Thomson) από e^-

$$\bar{\kappa}_{es} = 0{,}02\,(1+X)\,m^2\,kg^{-1}$$

Από παρατηρήσεις του υλικού που έχει εκτοξευθεί από το η-Car,
$\rightarrow X \sim 0.6$, οπότε $\bar{\kappa} \approx 0{,}032\ m^2 kg^{-1}$

Οπότε $L_{Edd} = 4\times3{,}14\times6{,}67\times10^{-11}\times3\times10^8\times32^{-1}\times10^2\times120\times2\times10^{30}\ W =$
$= 1{,}89\times10^{33}\ W \cong 4{,}9\times10^6 L_\odot$

$(L_\odot = 3{,}827\times10^{26}\ W)$

(β) $m_V = M_V + 5\log d - 5 + A_V$
όπου $d = 2330pc$, $A_V = 1.7\ mag$, $m_V \approx 0$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = M_V + 5\log(2330) + 1{,}7 - 5 \Rightarrow M_V = -13{,}54\ mag$

$M_V \approx M_{bol}$

$M_\odot = 4{,}74$ (M εδώ είναι το απόλυτο μέγεθος, όχι η μάζα)

Άρα $M - M_\odot = -13{,}54 - 4{,}74 = 18{,}28$

αλλά $M - M_\odot = -2.5\log(L/L_\odot) \Rightarrow L = 2{,}1\times10^7 L_\odot$

($L > L_{Ed}$ περίπου 4 φορές)

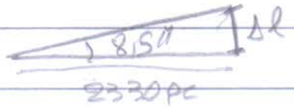
Αν υποθέσουμε ότι η φωτεινότητα ήταν σταθερή και ίση με $L = 2,1\times10^{7} L_\odot$ κατά τα τελευταία 20 χρόνια, τότε η συνολική ενέργεια των φωτονίων που εκπέμφθηκαν ήταν

$$E = 2,1\times10^{7} \times 3,83\times10^{26}\,W \times 20 \times 3,156\times10^{7}\,s = 4,8\times10^{42}\,J.$$

Η κινητική ενέργεια των ejecta με μάζα $3M_\odot$ και ταχύτητα 650km/s θα είναι

$$E_{kin} = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2}\, 3\times 1,989\times10^{30}\,kg \times 6,5^2\times10^{10}\,m^2/s^2 =$$
$$= 1,26\times10^{42}\,J$$

(γ) Μέγεθος του φλοιού $\Delta l = \frac{8,5}{3600} \times \frac{\pi}{180} \times 2330pc = 0,096pc =$
$= 3\times10^{15} m$



$v = 650\,km/s \sim$ σταθερή

$$t \sim \frac{\Delta l}{v} = \frac{3\times10^{15}\,m}{6,5\times10^{5}\,m/s} = 4,6\times10^{9}\,s \sim 145\,yr$$

Αυτό το αποτέλεσμα υποθέτει ότι $v \approx$ σταθ.
Ωστόσο περιμένουμε ότι αυτό δεν ισχύει καθ' όλη τη διάρκεια του φαινομένου. Π.χ. υπάρχει μια μικρή επιτάχυνση λόγω της πίεσης ακτινοβολίας. Οπότε η τιμή που βρήκαμε υποεκτιμά τον χρόνο t.
(Αργότερα μπορεί να έχουμε επιβράδυνση λόγω αλληλεπίδρασης με το μεσοαστρικό υλικό)

$\boxed{5}$ (ασκ 15.9, 15.10, 15.11 από αγγλική έκδοση C&O)

(α) Έστω ε το ποσό ενέργειας που απελευθερώνεται από τη ραδιενεργό διάσπαση ενός πυρήνα $^{59}_{27}Co$ σε $^{56}_{20}Fe$.
Τότε, η συνολική ενέργεια που απελευθερώνεται από τη ραδιενεργό διάσπαση N τέτοιων πυρήνων θα είναι:

$E = N.\epsilon$ και η αντίστοιχη φωτεινότητα θα είναι

$$L = \frac{dE}{dt} = \epsilon \frac{dN}{dt} \quad (1)$$

Αλλά $\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow \frac{dN}{N} = -\lambda dt \Rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t}$ (2)

Από (1) & (2) $\Rightarrow L = -\epsilon N_0 \lambda e^{-\lambda t}$ (3) $\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \epsilon\lambda^2 N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda L$ (4)

Επίσης $\frac{d\log L}{dt} = \frac{\log e}{L}\frac{dL}{dt}$ (5)

Από (4) & (5) $\Rightarrow \frac{d\log L}{dt} = -\log e\,\lambda = -0{,}434\lambda$ (6)

απόλυτο βολομετρικό μέγεθος

$M_{bol} = M_{\odot} - 2{,}5\log\frac{L}{L_{\odot}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log L = -\frac{M_{bol}-M_{\odot}}{2{,}5} + \log L_{\odot} \overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \frac{d\log L}{dt} = -\frac{1}{2{,}5}\frac{dM_{bol}}{dt}$ (7)

Από (6) & (7) $\Rightarrow \frac{dM_{bol}}{dt} = 2{,}5\times 0{,}434\lambda = 1{,}086\lambda$ (8)

(b) Εύρεση του λ για $\tau_{1/2} = 77{,}7d$:

$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2} = e^{-\lambda\tau_{1/2}} \Rightarrow -\ln 2 = -\lambda\,\tau_{1/2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} = 0{,}0089\ d^{-1}$ (9)

Από (8) & (9) $\Rightarrow \frac{dM_{bol}}{dt} = 0{,}0097\,mag\ d^{-1}$.

(γ) $N_0 = \frac{M}{m_{56Co}} = \frac{0{,}075M_{\odot}}{56\ amu} = \frac{0{,}075\times 1{,}989\times 10^{30}\ kg}{56\times 1{,}66\times 10^{-27}\ kg} = 1{,}6\times 10^{54}$ (10)

amu: atomic mass units

Από την εξ.(3) έχουμε ότι $L = \epsilon\lambda N$

Αμέσως μετά τη δημιουργία του κοβαλτίου η φωτεινότητα

είναι $L_0 = \epsilon\lambda N_0 = 3{,}72\,MeV\times 0{,}0089\,d^{-1}\times 1{,}6\times 10^{54} \underset{\text{μονάδες SI}}{=}$

$= 9{,}8\times 10^{34}\,W \underset{L_{\odot}}{=} 2{,}6\times 10^{8}\,L_{\odot}$

Μετά από 1 χρόνο:

$N = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow L = L_0 e^{-\lambda t}$ $t = 365d$ $\lambda t = 0{,}0388$

οπότε $L \approx 1\times 10^{7} L_{\odot}$

$\log L_0 \approx 35$ $(t=0)$

$\log L_{1y} \approx 33{,}6$ $(t=365)$

} συμφωνούν με το διάγραμμα.

(κεφ. 16.5 από αγγλική έκδοση (20) βλ.)

$\boxed{6}$ Πίεση στο εξωτερικό κέλυφος ΛΝ

$$P = \left(\frac{4}{17}\frac{16\pi a c}{3}\frac{G M_{wd}}{L_{wd}}\frac{k_B}{k_0 4 m_H}\right)^{1/2} T^{17/4} \quad (1)$$

όπου $k_0 = 4{,}34 \times 10^{21} Z (1+X) m^2 kg^{-1}$ (2) $\left(k_{Kramers} = k_0 \rho T^{-3.5}\right)$

(α) Από τον νόμο ιδανικού αερίου έχουμε ότι

$$P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \quad (3)$$

Από (1) & (3) $\Rightarrow$ $\rho = \left(\frac{4}{17}\frac{16\pi a c}{3}\frac{G M_{wd}}{L_{wd}}\frac{\mu m_H}{k_0 k_B}\right)^{1/2} T^{13/4}$ (4)

για τα μη εκφυλισμένα επιφανειακά στρώματα του ΛΝ

(β) Στη μετάβαση από το εκφυλισμένο ισόθερμο εσωτερικό (θερμοκρασίας T_c) στο μη εκφυλισμένο εξωτερικό κέλυφος μπορούμε να θεωρήσουμε ισότητα των δύο μερών της συνθήκης εκφυλισμού δηλ.

$$\frac{T_c}{\rho^{2/3}} = \frac{\hbar^2}{3 m_e k_B}\left[\frac{3\pi^2}{m_H}\left(\frac{Z}{A}\right)\right]^{2/3} = D \quad (5)$$

Λύνουμε ως προς ρ την (5) οπότε

$$\rho = \left(\frac{T_c}{D}\right)^{3/2} \quad (6)$$

Αντικαθιστούμε το ρ στην (4) από την (6) και παίρνουμε:

$$\left(\frac{T_c}{D}\right)^{3/2} = \left(\frac{4}{17}\frac{16\pi a c}{3}\frac{G M_{wd}}{L_{wd}}\frac{\mu m_H}{k_0 k_B}\right)^{1/2} T_c^{13/4} \quad (7)$$

(οριακά μεταξύ του ισόθερμου εσωτερικού και των εξωτερικών στρωμάτων παίρνουμε $T = T_c$)

$$(7) \Rightarrow L_{wD} = \frac{4}{17}\frac{16\pi a c}{3}\frac{\mu m_H}{k_0 k_B} G M_{wd} D^3 \, T_c^{7/2} = G' T_c^{7/2} \quad (8)$$

όπου $G' = \frac{4 D^3}{17}\frac{16\pi a c}{3}\frac{G m_H}{k_0 k_B}\mu M_{wd} = 6{,}65 \times 10^{-3}\left(\frac{M_{wd}}{M_\odot}\right)\frac{\mu}{Z(1+X)}$ (9)

Για $M_{wd} = 0{,}6\,M_\odot$ και σύνθεση του κελύφους $X=0$, $Y=0{,}95$, $Z=0{,}05$ βρίσκουμε από τον τύπο (8):

$$T_c = \left[\frac{L_{wd}}{6{,}65\times10^{-3}}\left(\frac{M_\odot}{M_{wd}}\right)\frac{Z(1+X)}{\mu}\right]^{2/7} \qquad (9)$$

Έστω $L_{wd} \simeq 0.03 L_\odot$ (κανονικά έπρεπε να δίνεται στην εκφώνηση)

Για εντελώς ιονισμένο αέρα, $\frac{1}{\mu} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{3}{4}\cdot 0{,}95 + \frac{1}{2}\,0{,}05 \Rightarrow \mu = 1.36$

Αντικαθιστώντας στην (9) βρίσκουμε $T_c \simeq 2{,}8\times10^7\,K$ και από τη σχέση (6) βρίσκουμε:

$$\rho = \left(\frac{T_c}{D}\right)^{3/2} = 3{,}4\times10^6\,kg\,m^{-3}$$ για τη πυκνότητα στη βάση του κελύφους

$\boxed{7}$ (ασκ. 16.8 από αγγλική έκδοση C&O)

(α) Λόγος ηλεκτροστατικής δυναμικής ενέργειας μεταξύ γειτονικών πυρήνων (φορτίου Ze ο καθένας) προς την χαρακτηριστική θερμική ενέργεια $\sim KT$:

$$\Gamma \equiv \frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r k_B T} \qquad (1)$$

όπου r η μέση απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών πυρήνων. Έστω ότι έχουμε N πυρήνες στον ΛΝ, με όγκο $\frac{4\pi}{3}r^3$ ο καθένας και μάζα Am_H (A ο μαζικός αριθμός $=12$ για C)

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V} = \frac{\cancel{N}\cdot Am_H}{\cancel{N}\cdot\frac{4\pi}{3}r^3} \Rightarrow r = \left(\frac{3Am_H}{4\pi\bar{\rho}}\right)^{1/3} \qquad (2)$$

Μπορούμε να εκτιμήσουμε τη $\bar{\rho}$ από τη σχέση:

$$\bar{\rho} \sim \frac{M_{wd}}{V_{wd}} = \frac{0,6 M_\odot}{\frac{4\pi}{3}(0,012 R_\odot)^3} = 4,89 \times 10^8 \ Kg\, m^{-3} \quad (3)$$

οπότε

από τις (2) & (3) $\Rightarrow$ $r = 2,14 \times 10^{-12}$ m (4)

(β) Από τις (1) και (4) και με $Z=6$ (= ατομικός αριθμός C) και $\Gamma = 160$ (για κρυστάλλωση) βρίσκουμε:

$$T_c = \frac{Z^2 e^2}{4\pi \varepsilon_0 r k_B \Gamma} = 1,76 \times 10^6 K$$

(γ) Από την άσκηση (6) έχουμε ότι $L_{WD} = C\, T_c^{7/2}$

όπου $C = 6,65 \times 10^{-3} \frac{M_{wd}}{M_\odot} \frac{\mu}{Z(1+X)}$

Για $X=0$, $Z=0,05$, $Y=0,95$ $\rightarrow$ $\mu \simeq 1,35$

$C \approx 0,056 \, W K^{-7/2}$

kelvin

και $L_{WD} \simeq 4 \times 10^{20} W \cong 1,1 \times 10^{-6} L_\odot$

(δ) $t = \frac{\text{αρ. πυρήνων (N)} \times \text{λανθάνουσα θερμότητα/πυρήνα}}{L_{WD}}$

$$N = \frac{M_{wd}}{A m_H} = 5,9 \times 10^{55}$$

$L_{WD} = 1,1 \times 10^{-6} L_\odot$ από ερωτ. (γ)

$T_c = 1,76 \times 10^6 K$ από ερωτ. (β)

οπότε $t = \frac{N k_B T_c}{L_{wd}} = 3,6 \times 10^{18} s \cong 1,1 \times 10^{11} yr$