

ΦΥΣΙΚΗ ΤΩΝ ΑΣΤΕΡΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 31/1/2023

ΘΕΜΑΤΑ

1. Η εξίσωση διάδοσης της ακτινοβολίας (ΕΔΑ) περιγράφει μαθηματικά τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μέσα από ένα μέσο. Η διάδοση αυτή επηρεάζεται από διαδικασίες απορρόφησης, εκπομπής και σκέδασης. Γράψτε την γενική μορφή της ΕΔΑ για ειδική ένταση ακτινοβολίας I_ν , που διαδίδεται σε μέσο με συντελεστή απορρόφησης α_ν , συντελεστή εκπομπής j_ν (μη λάβετε υπόψη τις διαδικασίες σκέδασης) και εξηγήστε πως προκύπτει. Ξαναγράψτε την ΕΔΑ χρησιμοποιώντας τις έννοιες του οπτικού βάθους και της συνάρτησης πηγής. Δείξτε ότι όταν το οπτικό βάθος γίνει πολύ μεγάλο, η ένταση ακτινοβολίας I_ν τείνει να ταυτιστεί με τη συνάρτηση πηγής S_ν .

Στη περίπτωση θερμικής ακτινοβολίας, τα α_ν και j_ν ικανοποιούν τον νόμο του Kirchhoff $j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T)$, όπου $B_\nu(T)$, η συνάρτηση Planck. Γράψτε την ΕΔΑ σε αυτή τη περίπτωση. Με τι ισούται η συνάρτηση πηγής εδώ; Πότε η ειδική ένταση ακτινοβολίας έχει τη μορφή ακτινοβολίας μελανού σώματος; (10)

2. Έστω πηγή πάχους D , που χαρακτηρίζεται από συντελεστή εκπομπής $j_\nu = A\nu^{-1}$ για $\nu_{min} \leq \nu \leq \nu_{max}$ και $j_\nu = 0$ για όλες τις άλλες συχνότητες, και από συντελεστή απορρόφησης

$$\alpha_\nu = B \left[\left(\frac{\nu}{\nu_1} \right)^2 - 1 \right] \text{ για } \nu_{min} \leq \nu \leq \nu_{max} \text{ και } \alpha_\nu = 0 \text{ για όλες τις άλλες συχνότητες.}$$

Δείξτε ότι η ειδική ένταση ακτινοβολίας που εκπέμπεται από τη πηγή δίνεται από τη σχέση

$$I_\nu = \frac{A}{\nu B \left[\left(\frac{\nu}{\nu_1} \right)^2 - 1 \right]} \left\{ 1 - e^{-BD \left[\left(\frac{\nu}{\nu_1} \right)^2 - 1 \right]} \right\}$$

Δείξτε ότι η συνολική ροή στην επιφάνεια της πηγής είναι

$$F = \frac{\pi A}{B} \ln \left(\frac{\nu_{max}^2 - \nu_1^2}{\nu_{min}^2 - \nu_1^2} \right)$$

$$\text{(δίνεται το ολοκλήρωμα } \int \frac{dz}{z(z-1)} = \ln \left(1 - \frac{1}{z} \right) \text{)} \quad (15)$$

3. Σε μία αστρική ατμόσφαιρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει κατά προσέγγιση τοπική θερμοδυναμική ισορροπία (ΤΘΙ). Θα υποθέσουμε επίσης ότι η ατμόσφαιρα αποτελείται από υδρογόνο, ότι η ενεργός θερμοκρασία κυμαίνεται μεταξύ 5000K και 25000K. Βρείτε μία προσέγγιση για το ποσοστό των ατόμων που βρίσκονται στη δεύτερη διεγερμένη κατάσταση (σειρά Balmer υδρογόνου) ως προς τον συνολικό αριθμό των ατόμων και ιόντων (N_2/N_{tot}), συναρτήσει του ποσοστού των ιονισμένων ατόμων Η (N_{II}/N_I). Εξετάστε τι συμβαίνει στο όριο μικρών και μεγάλων θερμοκρασιών. Με βάση αυτά κάντε ένα πρόχειρο διάγραμμα του $\frac{N_2}{N_{tot}}$ συναρτήσει της θερμοκρασίας. Τι προβλέπει αυτό το διάγραμμα για την ένταση των γραμμών Balmer σε αστρικά φάσματα;

Δίνονται:

$$\text{Εξίσωση Boltzmann: } \frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2-E_1)/kT}$$

Εξίσωση Saha: $\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2kT Z_{i+1}}{P_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_i/kT}$, όπου P_e η πίεση των ηλεκτρονίων
(15)

4. Γράψτε την εξίσωση διάδοσης ακτινοβολίας για τη προσέγγιση παραλληλεπίπεδης γκριζας ατμόσφαιρας (Plane-parallel grey atmosphere). Εξηγήστε. Υποθέτοντας επιπλέον ότι η συνάρτηση πηγής δεν εξαρτάται από τη διεύθυνση και ότι η ατμόσφαιρα δεν περιλαμβάνει πηγές ή καταβόθρες ενέργειας, δείξτε ότι η συνάρτηση πηγής ισούται με τη μέση ένταση ($S = J$). (5)

5. (α) Δείξτε ότι για ένα στατικό άστρο, η συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας γράφεται ως $\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho}{r^2}$, όπου ρ η πυκνότητα και M_r η μάζα εντός της ακτίνας r . 1^η εξίσωση αστρικής δομής. (7)

(β) Γράψτε την εξίσωση διατήρησης μάζας από την οποία μπορεί κανείς να υπολογίσει την M_r (αν γνωρίζει την $\rho(r)$). 2^η εξίσωση αστρικής δομής. (4)

(γ) Χρησιμοποιώντας την ποσότητα ϵ που δίνει τον ρυθμό παραγωγής ενέργειας (από πυρηνικές αντιδράσεις ή/και βαρύτητα) ανά μονάδα μάζας, γράψτε την 3^η εξίσωση αστρικής δομής που δίνει τη βαθμίδα της φωτεινότητας (Luminosity). (4)

(δ) Υποθέστε ότι έχουμε ένα άστρο για το οποίο η πίεση ακολουθεί τη σχέση $P = K\rho^{4/3}$. Σε αυτή τη περίπτωση δίνεται ότι η κεντρική πίεση είναι $P \propto M^2 R^{-4}$. Υποθέτοντας ότι το αέριο είναι τέλειο ($P \propto \rho T$) και ότι $\epsilon \propto \rho T^\beta$ ($\beta=4$ για την αλυσίδα pp) δείξτε ότι $L \propto M^{3.2}$ (για $\beta = 4$). Για ποια φάση αστρικής εξέλιξης περιμένουμε να ισχύει αυτή η σχέση και πως συγκρίνεται με τις παρατηρήσεις. (15)

6. (α) Εξηγήστε σύντομα που οφείλεται η πίεση εκφυλισμού. Οι συνθήκες στους πυρήνες άστρων του κλάδου των ερυθρών γιγάντων με σχετικά μικρές μάζες (σαν τον Ήλιο) είναι τέτοιες ώστε η πίεση εκφυλισμού των ηλεκτρονίων να είναι σημαντική. Με αυτό το δεδομένο, εξηγήστε ποιοτικά γιατί συμβαίνει στα άστρα αυτά **εκρηκτική έναρξη της καύσης του He – helium flash** (με τη διαδικασία 3-alpha).

(β) Ο πυρήνας ενός άστρου έχει μάζα M_c , ακτίνα R_1 και θερμοκρασία T_1 και βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία με τα υπερκείμενα στρώματα. Έστω ότι ισχύει ότι $P_{\alpha\epsilon\rho} : P_{\epsilon\kappa\phi} = 10 : 1$, όπου $P_{\alpha\epsilon\rho}$ η πίεση ιδανικού αερίου και $P_{\epsilon\kappa\phi}$ η πίεση εκφυλισμού (για μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια). Κάποια στιγμή ο πυρήνας καταρρέει και ισορροπεί σε μια νέα κατάσταση με $R_2 = 0.1R_1$ και $T_2 = 10T_1$. Πώς μεταβάλλεται η σχέση των πιέσεων; Ποια είναι η κυρίαρχη πίεση στη νέα κατάσταση; Θεωρείστε ότι η μάζα δε μεταβάλλεται και ότι ο εκφυλισμός παραμένει μη σχετικιστικός. Ποια αστροφυσική κατάσταση θα μπορούσε το παραπάνω να περιγράψει κατά προσέγγιση;

(γ) Δείξτε ότι η μάζα ενός λευκού νάνου είναι αντιστρόφως ανάλογη του όγκου του, δηλ. $M_{\Lambda N} V = \text{σταθερά}$ (25)

Δίνονται οι σχέσεις:

Πίεση εκφυλισμού για μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια $P = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5 m_e} \left[\left(\frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_H} \right]^{5/3}$ και

$\epsilon_{3\alpha} \propto T_8^{41.0}$ (όπου $T_8 \equiv \frac{T}{10^8 \text{K}}$)