Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 14/2/2017

1. (α) Έστω A, B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αν $\sup A = \inf B$, αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

(β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ακέραιος $k_n \in \mathbb{Z}$ ώστε $\left| x - \frac{k_n}{\sqrt{n}} \right| < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. Έστω (x_n) ακολουθία με $x_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δεδομένων των παρακάτω ορίων ελέγξτε αν υπάρχει στην κάθε περίπτωση το $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ και εφόσον υπάρχει υπολογίστε το (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας):

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1+x_n} = \frac{1}{2}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1+x_n} = 1.$$

3. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{1+k^2} - k), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin\left(\frac{1}{k}\right).$$

4. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(q) = 0$ για κάθε ρητό $q \in (a,b)$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$.

(β) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο ξ, τότε είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η f είναι ασυνεχής στο σημείο 0.

5. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα και φραγμένη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με $\ell := \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(β) Έστω p πολυώνυμο το οποίο δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^x = |p(x)|$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική λύση.

6. (α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos x}{\ln(x^2+2)}$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και ότι λαμβάνει μέγιστη τιμή. Προσδιορίστε τη μέγιστη τιμή της f χωρίς να κάνετε πράξεις.

(β) Έστω $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+\sqrt{x}) - f(x)) = 0$.

7. (α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor αποδείξτε ότι $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{k}} - 1\right)$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{k}} - 1 - \frac{1}{k}\right)$.

8. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, \cos(nx)\, dx = 0.$$

9. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την $f'(x) = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = \alpha e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την $g(x) = \int_0^{x^2} g(\sqrt{t})\, dt + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

10. (α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $\tan x = \sin x / \cos x$ για $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(β) Βρείτε τους πρώτους όρους a_0, a_1 του αναπτύγματος Taylor της $\tan x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k+1}$ με κέντρο το $x = 0$ και εξηγήστε γιατί δεν υπάρχουν στο ανάπτυγμα όροι άρτιας τάξης x^{2k}. Ο προσδιορισμός κάποιου τύπου για το γενικό όρο a_k είναι δύσκολος και δεν ζητείται.

(γ) Μπορείτε, ακόμη και αν δεν γνωρίζετε τον τύπο για τους συντελεστές a_k, (i) να υπολογίσετε το $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ γνωρίζοντας ότι $\tan 1 = 1.55\ldots$; (ii) να προσδιορίσετε την ακτίνα σύγκλισης της σειράς Taylor με κέντρο το $x = 0$; Επιχειρηματολογήστε γιατί πιστεύετε ότι είναι αυτή.

Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα και έχουν συνολική αξία δεκατριών μονάδων.

Καλή Επιτυχία!