Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 18/5/2017

1. (1.5μ) (α) Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a \leqslant b$. Αποδείξτε ότι $\sup A \leqslant \sup B$.

(β) Αποδείξτε ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \to a > 0$, τότε

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} > 0.$$

2. (2μ) (α) Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\alpha_n = \frac{5^n}{n!}, \quad \beta_n = (\sqrt[n]{3} - 1)^n, \quad \gamma_n = \frac{\cos(n^2)}{n}.$$

(β) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \to \frac{1}{2}$. Αποδείξτε ότι $[a_n] \to 0$ (με $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x).

3. (2μ) (α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k^2+1} - k), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{k}\right).$$

(β) Έστω $(a_k)_{k \geqslant 0}$ φραγμένη ακολουθια. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ισούται με 1.

4. (2μ) (α) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $|g|$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ενώ η g να είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και ότι $f(x/2) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(γ) Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \geqslant 0$, αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

5. (2μ) (α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(y) = \begin{cases} e^{-1/y} & \text{αν } y > 0 \\ 0 & \text{αν } y \leq 0 \end{cases}$. Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

(β) Έστω $\alpha > 0$. Σχεδιάστε τις συναρτήσεις $f(x) = \alpha e^x$ και $g(x) = 1 + x + x^2/2$ και έπειτα αποδείξτε ότι η εξίσωση $\alpha e^x = 1 + x + x^2/2$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα (η γραφική παράσταση δεν αποτελεί απόδειξη).

6. (1μ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f''' = f$ και $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = 0$.

(α) Έστω $R > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M = M(R) > 0$ ώστε: για κάθε $x \in [-R, R]$ και για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant M.$$

(β) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{3n,f,0}$ και, χρησιμοποιώντας το (α) και οποιονδήποτε τύπο υπολοίπου, αποδείξτε ότι

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη*. Αρκεί να αποδείξετε το ζητούμενο για κάθε $x \in [-R, R]$, όπου $R > 0$.]

7. (2μ) (α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{e^x + e^{2x}}\, dx \qquad \text{και} \qquad \int \cos^2 x \sin^3 x\, dx.$$

(β) Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε

$$\alpha_n = \int_1^n \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \frac{1}{n^2}$ και συμπεράνατε ότι η (α_n) συγκλίνει. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, αποδείξτε ότι υπάρχει το

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Καλή Επιτυχία!