Ανάλυση Ι και Εφαρμογές

16 Μαΐου 2019

1. (2 μον.) (α) Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leqslant b$. Αποδείξτε ότι το A είναι άνω φραγμένο, το B είναι κάτω φραγμένο, και $\sup A \leqslant \inf B$.

(β) Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\alpha_n = \sqrt{n^2+n} - n, \quad \beta_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \gamma_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}.$$

2. (2 μον.) (α) Έστω (y_n) αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $y_n \to y$.

(β) Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε

$$2x_{n+1} \leqslant x_n + x_{n+2}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $y_n = x_{n+1} - x_n$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Μπορείτε να βρείτε το όριό της;

3. (2 μον.) (α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{2k} \frac{1}{1+x^3}\, dx.$$

4. (2 μον.) (α) Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, τέτοιες ώστε $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε $|f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in (0, \infty)$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{x} \to 1.$$

Στη συνέχεια, να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. που ικανοποιούν την $f(x^2) = f(x)$ για κάθε $x \in (0, \infty)$.

5. (2 μον.) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Εάν επιπλέον ισχύει ότι $f'(0) \geqslant 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x^2)}{f(x)} = +\infty$.

6. (1 μον.) Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln(1+x)$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x>0$,

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \qquad k=1,2,\ldots$$

και ότι, για κάθε $x>0$,

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}.$$

7. (2 μον.) (α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{και} \qquad \int \ln(x^2+1)\,dx.$$

(β) Έστω $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\alpha>0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\alpha.$$

Καλή Επιτυχία!