Ανάλυση Ι και Εφαρμογές

11 Σεπτεμβρίου 2019

1. (2 μον.) (α) Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: «για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a \leqslant b$». Αποδείξτε ότι $\sup A \leqslant \sup B$.
(β) Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει η ανισότητα $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1$.

2. (2 μον.) (α) Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\alpha_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}, \quad \beta_n = \frac{\lfloor \sqrt{2} n \rfloor}{n}, \quad \gamma_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \quad \delta_n = \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Με $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x.
(β) Έστω (x_n) η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $x_1 = 2$ και

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.

3. (2 μον.) (α) Εξετάστε (με αιτιολόγηση) ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{k!}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

(β) Έστω (x_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε $s_n = x_1 + \cdots + x_n$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{x_n}{s_n^2} \leqslant \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$$

για κάθε $n \geqslant 2$, και στη συνέχεια ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{s_n^2}$$

συγκλίνει.

4. (2 μον.) (α) Εξετάστε αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση f με:

(i) πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και εικόνα (σύνολο τιμών) το $[0, \infty)$,

(ii) πεδίο ορισμού το $(0, 1]$ και εικόνα το $[0, \infty)$,

(iii) πεδίο ορισμού το $(0, 1]$ και εικόνα το $(-\infty, \infty)$.

Αν δεν υπάρχει εξηγήστε γιατί, ενώ αν υπάρχει δώστε κάποιο παράδειγμα.
(β) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $a \leqslant x < b$ και για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $y \in (x, x + \delta) \cap [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) < f(y)$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα.

5. (2 μον.) (α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε πλήρως ότι υπάρχει $y \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = f(y)(b-a).$$

(β) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Αν $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a, b]$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \int_a^b |f'(t)|\, dt.$$

6. (1 μον.) Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi_x \in (x, x+1)$ ώστε

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(\xi_x).$$

(β) Αποδείξτε ότι αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

7. (2 μον.) (α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα (το τρίτο είναι γενικευμένο)

$$\int_0^1 \ln(x^2+1)\, dx \qquad \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx \quad \text{και} \qquad \int_0^1 \ln x\, dx.$$

(β) Βρείτε το n-οστό πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ (με κέντρο το 0) για τη συνάρτηση

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Καλή Επιτυχία!