ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στο μάθημα
Ανάλυση Ι & Εφαρμογές
26 Φεβρουαρίου 2015

Απαντήστε και στα 4 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Όσοι έχουν πάρει προβιβάσιμο βαθμό στην Πρόοδο (πάνω από 20/50), μπορούν αν θέλουν να απαντήσουν μονάχα στα θέματα Γ, Δ και ο βαθμός τους θα συνυπολογιστεί με αυτόν της Προόδου. Όλα τα θέματα είναι ίσης βαθμολογικής αξίας.
Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω $\mathbb{A}$ ένα μη κενό σύνολο. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$f(x) = \inf\{|x - a|, \text{ για όλα τα } a \in \mathbb{A}\}.$$

(α) Αν το σύνολο $\mathbb{A}$ αποτελείται από τα στοιχεία $\{5, 10\}$ να σχεδιάσετε το γράφημα της f.
(β) Αν $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ (το σύνολο των ακεραίων) να κατασκευάσετε το γράφημα της f και να βρείτε τη μέγιστη τιμή που λαμβάνει αυτή.
(γ) Αν $\mathbb{A} = \mathbb{Q}$ (το σύνολο των ρητών) ποια είναι η τιμή του sup του πεδίου τιμών της f;

2. (α) Αποδείξτε ότι η ακολουθία a_n:

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

ή αλλιώς η ακολουθία που δίνεται από τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ (με $a_1 = \sqrt{2}$) συγκλίνει.
(β) Υπολογίστε το όριο αυτής.

3. Εξετάστε λεπτομερώς ως προς τη σύγκλιση

$$\text{τη σειρά: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}, \qquad \text{και τη δυναμοσειρά: } \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n \text{ τοξεφ} \left(\frac{n^3+1}{n^2} \right).$$

ΘΕΜΑ Β

1. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{dx}{x}$$

είναι φθίνουσα και φραγμένη από κάτω. [Δίνεται η ανισότητα $1 - (1/x) \leq \ln x < x - 1$ για $x > 0$.]

2. Δείξτε ότι ο αριθμός στον οποίο συγκλίνει η ακολουθία γ_n είναι ένας αριθμός στο διάστημα $(0, 1)$. Ο αριθμός αυτός είναι γνωστός ως σταθερά των Euler-Mascheroni γ.

3. Εκτιμήστε περίπου (με ακρίβεια ακεραίου) την τιμή της ποσότητας

$$e \cdot \sqrt{e} \cdot \sqrt[3]{e} \cdot \ldots \cdot \sqrt[N]{e}$$

για $N = 1000$, θεωρώντας ότι σε αυτό τον όρο η γ_n έχει πλησιάσει στο όριο της σε απόσταση μικρότερη του 0.001. [Δίνεται ότι $e^\gamma = 1.781$ με ακρίβεια χιλιοστού.]

ΘΕΜΑ Γ Έστω η συνάρτηση

$$f_0(x) = \frac{1}{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

όπου το πολυώνυμο $P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ έχει n αρνητικές ρίζες $x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < 0$.

1. Να δείξετε ότι όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ είναι θετικοί και εξ' αυτού να δείξετε ότι $f_0(x) < 1/x^n$ για $x > 0$.

Τα δύο ακόλουθα ερωτήματα έχουν τεθεί λανθασμένα.

2. Τώρα κατασκευάστε την ακολουθία από συναρτήσεις

$$f_1(x) = \int_0^x f_0(y)dy,\ f_2(x) = \int_0^x f_1(y)dy, \ldots, f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(y)dy, \ldots$$

   Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανισότητα και γράφοντας το κάθε ολοκλήρωμα ως άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων, ένα από το 0 ως κάποιο αυθαίρετο x_0 και ένα από το x_0 ως ένα οσοδήποτε μεγάλο x, δείξτε ότι υπάρχει (είναι πεπερασμένο) το $\lim_{x\to\infty} f_k(x)$ για όλα τα $k < n$. [Ελέγξτε αν το 2ο από τα παραπάνω 2 ολοκληρώματα συγκλίνει για $x \to \infty$.]

3. Εξετάστε αν υπάρχει (αν είναι πεπερασμένο) το $\lim_{x\to\infty} f_n(x)$.

4. Ελέγξτε αν υπάρχει το όριο (αν είναι πεπερασμένο) $\lim_{k\to\infty} f_k(1)$. Σκεφτείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f_0 στο διάστημα $[0, 1]$.

ΘΕΜΑ Δ Ο Maxwell θέλοντας να ελέγξει κατά πόσο η δύναμη Coulomb είναι δύναμη ακριβώς αντιστρόφου τετραγώνου, δηλαδή ότι αλλάζει με την απόσταση ως $1/r^2$ και όχι σαν μια άλλη δύναμη του r, υπολόγισε ότι το δυναμικό στο εσωτερικό μιας μεταλλικής σφαίρας ακτίνας R θα δίνεται από τη σχέση (αγνοώντας όρους τάξης ϵ^2)

$$V(x) = \frac{KQ}{2R^\epsilon x}\left[\left(1+\frac{x}{R}\right)^{(1-\epsilon)} - \left(1-\frac{x}{R}\right)^{(1-\epsilon)}\right]$$

όπου x είναι η απόσταση από το κέντρο της σφαίρας, Q το φορτίο που έχει κατανεμηθεί ομοιόμορφα στην επιφάνεια της σφαίρας, και K, ϵ οι σταθερές στη δύναμη μεταξύ δύο σημειακών φορτίων q_1, q_2 έτσι ώστε η δύναμη Coulomb να δίνεται από την υποθετική σχέση

$$F = K\frac{q_1 q_2}{r^{2+\epsilon}}.$$

1. Να υπολογίσετε την τιμή του δυναμικού στην επιφάνεια της σφαίρας για $\epsilon = 0$.

2. Να αναπτύξετε κατά Taylor την τιμή του δυναμικού $V_0 = V(R)$ στην επιφάνεια της σφαίρας για μικρά ϵ κρατώντας μέχρι όρους πρώτης τάξης ως προς ϵ (θεωρούμε το ϵ πολύ μικρή ποσότητα). [Ίσως σας χρησιμεύσει η σχέση $a^x = e^{x\ln a}$.]

3. Τώρα αναπτύξτε κατά Taylor το δυναμικό σε μια ακτίνα $x = R/2$ πάλι για μικρά ϵ κρατώντας μέχρι όρους πρώτης τάξης ως προς ϵ.

4. Δείξτε ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ της σφαιρικής επιφάνειας και της ακτίνας $x = R/2$ είναι $k\boldsymbol{\epsilon}V_0$ σε πρώτη τάξη ως προς $\boldsymbol{\epsilon}$. Υπολογίστε την τιμή του παράγοντα k. [Δίνεται ότι $\ln 3 \simeq 1.10$, $\ln 2 \simeq 0.70$.]

5. Ο Maxwell τοποθέτησε ένα ευαίσθητο ηλεκτρόμετρο για να μετρήσει τη διαφορά δυναμικού μεταξύ της επιφάνειας της σφαίρας και μιας ομόκεντρης μεταλλικής σφαιρικής επιφάνειας μισής ακτίνας που τοποθέτησε μέσα στη σφαίρα και εφαρμόζοντας υψηλό δυναμικό V_0 στην εξωτερική σφαίρα βρήκε ότι η διαφορά δυναμικού των δύο σφαιρών ήταν μικρότερη από 10^{-5} του V_0. Με το πείραμα αυτό έδειξε ότι η δύναμη στο νόμο του Coulomb διαφέρει από το 2 λιγότερο από πόσο;

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

1. (α) Για $x < 5$, $f(x) = |x-5|$. Για $5 \leq x < 7.5$, $f(x) = |x-5|$. Για $7.5 \leq x < 10$, $f(x) = |x-10|$. Για $10 \leq x$, $f(x) = |x-10|$. Το γράφημα είναι ένα W.
(β) Αντίστοιχα η f ανεβοκατεβαίνει ευθύγραμμα (σαν πριόνι) μεταξύ δύο διαδοχικών ακεραίων λαμβάνοντας τη μέγιστη τιμή $1/2$ ακριβώς στη μέση.
(γ) Επειδή το σύνολο των ρητών είναι πυκνό (σε κάθε αριθμό υπάρχει ένας ρητός οσοδήποτε κοντά) η ελάχιστη απόσταση (το inf) είναι 0. Επομένως η συνάρτηση έχει ως πεδίο τιμών το $\{0\}$ και το sup του πεδίου τιμών είναι το 0. Αν ήταν κάποιος άλλος θετικός αριθμός ξ (το πεδίο τιμών της f εξορισμού λαμβάνει μόνο θετικές ή μηδενικές τιμές), τότε αυτό θα σήμαινε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός τέτοιος που να μην υπάρχει ρητός κοντά του σε απόσταση μικρότερη του ξ. Άτοπο.

2. (α,β) Η ακολουθία είναι η
$$2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$$
Ο εκθέτης είναι μια γεωμετρική πρόοδος που συγκλίνει στο 1. Επομένως συγκλίνει και η ακολουθία στο 2. Εξάλλου είναι εύκολο να δει κανείς ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα και πάντα μικρότερη του 2.

3. (α) Από το λόγο των διαδοχικών όρων
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5$$
που συγκλίνει στο 1/2. Επομένως η σειρά συγκλίνει.
(β) Για τη δεύτερη παρατηρούμε ότι για μεγάλα n το
$$\text{τοξεφ}\left(\frac{n^3+1}{n^2}\right)$$
συγκλίνει $\pi/2$. (Το όρισμα είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία τείνουσα στο $+\infty$.) Επομένως βρίσκεται μεταξύ του $\pi/2$ και του $\pi/2 - a$ για κάποιο a. Η σειρά λοιπόν φράσσεται μεταξύ της
$$S_1 = (\pi/2)\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$$
και της
$$S_2 = (\pi/2 - a)\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$$
Και οι δύο συγκλίνουν για $0 < x < 2$. Το ίδιο ισχύει και για τη δοσμένη δυναμοσειρά.

ΘΕΜΑ Β

1. Είναι φθίνουσα γιατί
$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln((n+1)/n) \leq \frac{1}{n+1} - [1 - \frac{n}{(n+1)}] = 0.$$
Επίσης είναι φραγμένη από κάτω από το 0 αφού
$$\frac{1}{n} > \int_n^{n+1}\frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Η τελευταία ανισότητα είναι συνέπεια του

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{n}.$$

Οπότε όλα τα κλάσματα εκτός του τελευταίου είναι μεγαλύτερα από ένα μέρος του ολοκληρώματος. Το τελευταίο κλάσμα $1/n$ που περισσεύει είναι θετικό.

2. Αφού είναι φθίνουσα και φράσσεται από κάτω από το 0, το όριο της θα είναι ένας αριθμός μεταξύ του 0 και του 1 (του 1ου όρου).

3.
$$e \cdot \sqrt{e} \cdot \sqrt[3]{e} \cdot \ldots \cdot \sqrt[N]{e} = e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{N}} = e^{\ln N + \gamma + \epsilon}$$

όπου γ η σταθερά Euler-Mascheroni και $\epsilon < 0.001$ η απόσταση της γ_N από το όριό της γ. Επομένως το ζητούμενο γινόμενο είναι

$$e^{\ln N} e^{\gamma} e^{\epsilon} \simeq N \times 1.781(1+\epsilon) = \text{μεταξύ } 1781 \text{ και } 1781 \times (1.001) \simeq 1783.$$

[Ο υπολογιστής δίνει 1782.]

ΘΕΜΑ Γ

1.
$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = (x+|x_1|)(x+|x_2|)\ldots(x+|x_n|)$$

Κατασκευάζοντας όλα τα γινόμενα οι συντελεστές όλων των δυνάμεων του x θα είναι άθροισμα από γινόμενα θετικών όρων άρα θα είναι θετικοί αριθμοί. Επομένως $P_n(x) > x^n$ και$f_0(x) < 1/x^n$ αν $x > 0$.

2,3. Όλοι θα πάρουν +1 από αυτά τα λανθασμένα ερωτήματα (είτε τα γράψαν είτε όχι) και όσοι τα προσπάθησαν με ορθά βήματα θα πάρουν έξτρα μόρια.

Τα λανθασμένα ζητούμενα του Προβλήματος ζητούσαν να μελετήσει κανείς τον τρόπο που η συγκεκριμένη συνάρτηση $f_0(x)$ συμπεριφέρεται στο άπειρο.

Καταρχάς είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι η $f_1(x)$ τείνει σε κάποιο θετικό αριθμό. Είναι συνεχής, αύξουσα λόγω ολοκλήρωσης θετικής συνάρτησης και φραγμένη από πάνω αφού

$$f_1(x) < f_1(x_0) - \frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\frac{1}{x_0^{n-1}}$$

για οποιοδήποτε αυθαίρετο $x_0 > 0$ (το σπάσιμο της συνάρτησης έγινε σύμφωνα με την υπόδειξη του ερωτήματος [2] και χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα που βρήκαμε στο 1ο ερώτημα). Επομένως ένα άνω φράγμα είναι το

$$f_1(x_0) + \frac{1}{n-1}\frac{1}{x_0^{n-1}}$$

Ας ονομάσουμε $C_1 > 0$ το όριο της f_1 στο άπειρο.

$$C_1 = \lim_{x\to\infty} f_1(x) = \int_0^{\infty} f_0(y)dy$$

Προφανώς αν συνεχίσουμε με την κατασκευή της f_2 όπως δίνεται στο ερώτημα θα πάρουμε μια συνάρτηση η οποία θα αποκλίνει στο άπειρο, αφού από κάποιο x και πάνω η f_1 θα είναι μεγαλύτερη από $C_1/2$ και η ολοκλήρωση μιας θετικής σταθεράς μέχρι το άπειρο θα αποκλίνει!

Αν τροποιούσαμε τα δεδομένα έτσι ώστε να κατασκευάζαμε από την f_1 μια συνάρτηση η οποία να μηδενίζεται καταλλήλως στο άπειρο ώστε το ολοκλήρωμά της να συγκλίνει στο άπειρο θα ήταν πιο λογικό.

Τροποποιούμε λοιπόν το δεδομένο ως ακολούθως. Φτιάχνουμε τη συνάρτηση

$$F_1(x) = C_1 - f_1(x) = \int_x^\infty f_0(y)dy.$$

Αυτή είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση, φθίνουσα με $F_1(0) = C_1$ και $\lim_{x\to\infty} F_1(x) = 0$, δηλαδή μοιάζει κάπως με την $f_0(x)$ στη γενική της μορφή. Επιπλέον ο τρόπος που προσεγγίζει το 0 στο άπειρο μπορεί να φανεί από τις ακόλουθες ανισότητες: Αφού

$$nx^n > P_n(x) > x^n$$

για όλα τα $x > x_0 = \max\{1, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0\}$, θα είναι και

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \frac{1}{ny^n}dy < F_1(x) < \int_x^\infty \frac{1}{y^n}dy \rightarrow \\ \frac{1}{n(n-1)x^{n-1}} < F_1(x) < \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \end{aligned} \tag{1}$$

Δηλαδή προσεγγίζει το 0 με συμπεριφορά ανάλογη του $1/x^{n-1}$.

Η καινούργια συνάρτηση F_1 έχει παρόμοια χαρακτηρηστικά με την f_0. Ξεκινά από μια θετική τιμή ($F_1(0) = C_1$, είναι θετική και φθίνουσα, και έχει όριο στο άπειρο το 0. Η διαφορά της με την f_0 είναι ότι αντί να βρίσκεται στο διάστημα $(1/(nx^n), 1/x^n)$ για $x > x_0$ αυτή βρίσκεται στο διάστημα

$$\left(\frac{1}{n(n-1)x^{n-1}}, \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right).$$

Τώρα πλέον μπορούμε να συνεχίσουμε κατασκευάζοντας την

$$f_2(x) = \int_0^x F_1(y)dy$$

και από αυτήν την

$$F_2(x) = C_2 - f_2(x) = \int_0^\infty F_1(y)dy - \int_0^x F_1(y)dy = \int_x^\infty F_1(y)dy$$

η οποία έχει $F_2(0) = C_2 = \int_0^\infty F_1(y)dy$, είναι θετική και φθίνουσα και έχει όριο στο άπειρο το 0. Το C_2 υπάρχει αφού η F_1 συγκλίνει καταλλήλως στο άπειρο (κατ΄αναλογία με την ύπαρξη του C_1). Επιπλέον για $x > x_0$

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)x^{n-2}} < F_2(x) < \frac{1}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}.$$

Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί μέχρι την $F_{n-1}(x) = \int_x^\infty F_{n-2}(y)dy$ η οποία για $x > x_0$ βρίσκεται ανάμεσα στις

$$\frac{1}{n!x} < F_{n-1}(x) < \frac{1}{(n-1)!x}$$

Το επόμενο βήμα, δηλαδή η κατασκευή $F_n(x) = \int_x^\infty F_{n-1}(y)dy$ παύει να συγκλίνει αφού στο άπειρο ξεπερνά μια συνάρτηση που αποκλίνει λογαριθμικά.

Επομένως αν αλλάζαμε τους ορισμούς σε

$$F_1(x) = \int_x^\infty f_0(y)dy, \; F_2(x) = \int_x^\infty F_1(y)dy, \ldots, F_k(x) = \int_x^\infty F_{k-1}(y)dy, \ldots$$

η διατύπωση των ερωτημάτων [2,3] για τις F αντί για τις f θα ήταν σωστή και μάλιστα αν συνέκλιναν (για $k < n$) θα συνέκλιναν στο 0 στο άπειρο (αντί σε κάποιον πεπερασμένο αριθμό).

4. Η απάντηση που ακολουθεί στο ερώτημα αυτό είναι σωστή για τις συναρτήσεις f όπως αυτές ορίστηκαν στο λανθασμένο ερώτημα [2].

   Είναι
$$\frac{1}{a_0} = f_0(0) > f_0(x) > f_0(1).$$
   Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το ότι η συνάρτηση είναι φθίνουσα (το πολυώνυμο του παρονομαστή έχει θετική παράγωγο σε όλα τα $x > 0$). Έτσι
$$\begin{aligned} f_0(0)\int_0^x dx = f_0(0)x > f_1(x) > f_0(1)\int_0^x dx &= f_0(1)x \\ f_0(0)\frac{x^2}{2} > f_2(x) > f_0(1)&\frac{x^2}{2} \\ &\ldots \\ f_0(0)\frac{x^n}{n!} > f_n(x) > f_0(1)&\frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$
   Επομένως
$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) < \lim_{n\to\infty} \frac{f_0(0)}{n!} = 0$$
   Αφού όλες οι f_k είναι θετικά ορισμένες το όριο της $f_n(1)$ είναι το 0.

ΘΕΜΑ Δ

1.
$$V_{\epsilon=0}(x) = \frac{KQ}{2R^\epsilon x}[(1 + x/R) - (1 - x/R)] = \frac{KQ}{R}$$
   δηλαδή ανεξάρτητη από το x (τη θέση μέσα στη σφαίρα).

2.
$$\begin{aligned} (1 \pm x/R)^{(1-\epsilon)} &= e^{(1-\epsilon)\ln(1\pm x/R)} \\ &= e^{\ln(1\pm x/R)} e^{-\epsilon \ln(1\pm x/R)} \\ &\simeq (1 \pm x/R)(1 - \epsilon \ln(1 \pm x/R)). \end{aligned}$$
   Επομένως για $x = R$ (ο 2ος όρος με το $1 - x/R$ μηδενίζεται):
$$V_0 = V(R) \simeq \frac{KQ}{2R^\epsilon R}[2(1 - \epsilon \ln(2))] = \frac{KQ}{R^\epsilon R}[(1 - \epsilon \ln(2))]$$

3.
$$\begin{aligned} V(R/2) &\simeq \frac{KQ}{2R^\epsilon(R/2)}[(3/2)(1 - \epsilon \ln(3/2)) - (1/2)(1 - \epsilon \ln(1/2))] \\ &= \frac{KQ}{R^\epsilon R}[1 - \epsilon((3/2)\ln 3 - \ln 2)] \end{aligned} \tag{2}$$

4. Στα προηγούμενα ερωτήματα πιθανώς κάποιοι να ανέπτυξαν και τον όρο R^{ϵ} σε πρώτη τάξη ως προς ϵ. Στις λύσεις δεν κάναμε αυτή την ανάπτυξη για 2 λόγους: (α) στη διαφορά δυναμικού οι όροι από αυτή την ανάπτυξη θα φεύγαν αφού και τα δύο δυναμικά έχουν ίδια εξάρτηση από R^{ϵ} και (β) για φυσικούς λόγους δεν θα ήταν πρέπον αφού τότε θα εμφανιζόταν όροι της μορφής $\ln R$ οι οποίοι περιέχουν τον λογάριθμο ενός διαστατικού μεγέθους! Κρατώντας το ως R^{ϵ} και στα 2 δυναμικά μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι δεν εμπεριέχει τέτοια προβλήματα αφού οι διαστάσεις του K μπορεί να είναι κατάλληλες ώστε να απορροφήσουν μονάδες της μορφής m^{ϵ} στον παρονομαστή. Προφανώς δεν είναι μαθηματικά λάθος αν ανέπτυξε κάποιος και το R^{ϵ}.

$$V(R) - V(R/2) = \frac{KQ}{R^{\epsilon}R}\epsilon((3/2)\ln 3 - 2\ln 2)$$

Ο πρώτος όρος είναι το V_0 σε μηδενική τάξη ως προς ϵ. Ο τελευταίος όρος είναι το k. Επομένως $k = 0.25$.

5. Αφού

$$|V(R) - V(R/2)| \simeq |\epsilon| 0.25 V_0 < 10^{-5} V_0$$

βγαίνει το συμπέρασμα ότι ο εκθέτης στο νόμο του Coulomb δεν διαφέρει περισσότερο από 4×10^{-5}. Για την ιστορία, το πείραμα του Maxwell έβγαλε ανώτατο όριο για το $|\epsilon|$, 5×10^{-5}, χρησιμοποιώντας ελαφρώς διαφορετική τιμή για την εσωτερική ακτίνα από $R/2$. Τα σημερινά πειράματα (παρόμοιας μορφής) έχουν κατεβάσει το όριο για το $|\epsilon|$ κάτω από το 10^{-19}!