ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ανάλυση Ι & Εφαρμογές

9 Ιανουαρίου 2015

Απαντήστε και στα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα.
Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α [15 μόρια] Έστω μια ακολουθία a_n. Με βάση αυτήν ορίζουμε τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\sigma_n = \sup\{a_i,\ \text{με } i \leq n\}, \quad \Sigma_n = \sup\{a_i,\ \text{με } i > n\}$$
$$\lambda_n = \inf\{a_i,\ \text{με } i \leq n\}, \quad \Lambda_n = \inf\{a_i,\ \text{με } i > n\}$$

Τα όρια των ακολουθιών αυτών, αν υπάρχουν, θα τα ονομάσουμε αντίστοιχα

$$\lim a_n = a\ ,\ \ \lim \sigma_n = \sigma\ ,\ \ \lim \Sigma_n = \Sigma\ ,\ \ \lim \lambda_n = \lambda\ ,\ \ \lim \Lambda_n = \Lambda.$$

Ελέγξτε αν ισχύουν οι προτάσεις που ακολουθούν. Για την κάθε μία αν ισχύει γράψτε **ΙΣΧΥΕΙ** δίνοντας και ένα παράδειγμα ακολουθίας μαζί με το/τα όρια που αναφέρονται στην πρόταση. Αν όχι, γράψτε **ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ**, δίνοντας ένα παράδειγμα ακολουθίας (μαζί με τα αντίστοιχα όρια) η οποία να βρίσκεται σε αντίθεση με την πρόταση. Η βαθμολογία είναι 1 για τη σωστή απόφαση (ισχύει / δεν ισχύει) και 2 για την καταλληλότητα του παραδείγματος (ή αντιπαραδείγματος), για την κάθε μία πρόταση. (Δεν χρειάζεται να αποδείξετε τίποτε.)

1. Αν η a_n είναι άνω φραγμένη, τότε υπάρχει το σ.
2. Αν $\lambda = \Lambda$, τότε η ακολουθία a_n έχει όριο.
3. Αν $\Sigma - \Lambda > 0$, τότε η ακολουθία a_n δεν συγκλίνει.
4. Αν $\sigma - \lambda > 0$, τότε η ακολουθία a_n δεν συγκλίνει.
5. Μπορεί όλοι οι όροι της σ_n να είναι μικρότεροι του Λ.

ΘΕΜΑ Β [20 μόρια (15 + 5)]

1. Η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$
είναι ασυνεχής. Η $g(x) = xf(x)$ είναι συνεχής στο 0; Ελέγξτε το με βάση τον ορισμό της συνέχειας.

2. Αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, δείξτε με ένα παράδειγμα ακολουθίας a_n ότι δεν συγκλίνει αναγκαστικά και η $\sum |a_n|$. (Δεν ζητείται απόδειξη παρά μόνο ένα παράδειγματέτοιας ακολουθίας.)

ΘΕΜΑ Γ [15 μόρια]

Δείξτε μέσω του εψιλοντικού ορισμού (του ορισμού του ορίου μιας ακολουθίας) ότι αν η ακολουθία θετικών όρων a_n συγκλίνει στον αριθμό a τότε και η $\beta_n = \sqrt{a_n}$ συγκλίνει στον αριθμό $\beta = \sqrt{a}$. Θα μπορούσε ο a να είναι ίσος με 0;

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

1. ΙΣΧΥΕΙ Για παράδειγμα η ακολουθία $a_n = 1$ είναι φραγμένη και η σ_n που συμπίπτει με την a_n έχει όριο $\sigma = 1$. Η ουσία αυτής της πρότασης συνδέεται με το γεγονός ότι η σ_n είναι αύξουσα ακολουθία (ανεξαρτήτως από το αν είναι φραγμένη η a_n) και αφού είναι και φραγμένη θα έχει όριο.
2. ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ Για παράδειγμα η $a_n = (-1)^n$ που ταλαντώνεται μεταξύ 1 και -1 δεν συγκλίνει παρόλο που $\lambda = \Lambda = -1$.
3. ΙΣΧΥΕΙ Για την παραπάνω ακολουθία $\Sigma = 1$ και $\Lambda = -1$. Η ισχύς της πρότασης βασίζεται στο ότι αν η ακολουθία συγκλίνει τότε όλοι οι όροι της από ένα σημείο και μετά πλησιάζουν στο τελικό όριο. Επομένως και το sup και το inf των όρων αυτών τείναουν να εξισωθούν μεταξύ τους. Αν αυτοί διαφέρουν τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει αλλά ταλαντώνεται.
4. ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ Για παράδειγμα η $a_n = 1, 0, 1/2, 1/2, 1/2, \ldots$ αν και συγκλίνει οι πρώτοι της όροι κρατάνε τα $\sigma = 1$ $\lambda = 0$ σε απόσταση.
5. ΙΣΧΥΕΙ αν και φαίνεται εκ πρώτης όψης παράλογο να είναι το sup μικρότερο του inf. Όμως αν η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη (π.χ. $a_n = (n-1)/n$) κάθε επιπλέον όρος της που συμπεριλαμβάνεται στον σ_n ανεβάζει τον σ_n ($\sigma_n = (n-1)/n$) αλλά παραμένει πάντα μικρότερος του $\Lambda = 1$ που αποτελεί και το όριο της a_n αλλά και το sup και το inf των "τελικών" της όρων.

ΘΕΜΑ Β

1. Αφού η μία από τις δύο συναρτήσεις είναι ασυνεχής δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο του γινομένου της απλά. Πρέπει να καταφύγουμε στον ορισμό της συνέχειας. Δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ πρέπει να βρούμε μια κατάλληλη συνάρτηση $\delta(\epsilon)$ τέτοια ώστε όλα τα $|x - 0| < \delta$ να οδηγούν αναγκαστικά σε $|g(x) - g(0)| < \epsilon$. Sthn per;iptvs;h maw $g(0) = 0 * 1 = 0$ (αφού το 0 είναι ρητός). Επομένως το ερώτημα είναι για ποια δ αν $|x| < \delta$ θα είναι και $|g(x)| < \epsilon$. Όμως η $g(x)$ είναι είτε x (αν x ρητός) είτε 0. Επομένως αρκεί να διαλέξουμε $\delta = \epsilon$ αφού αν $|x| < \delta = \epsilon$ θα είναι και $0 < |x| < \epsilon$. Προφανώς και οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση $\delta(\epsilon) < \epsilon$ (π.χ. $\delta = \epsilon/2$) είναι εξίσου καλή επιλογή.

2. Το κλασικότερο παράδειγμα είναι η $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
   ΠΡΟΣΟΧΗ: η $\sum(-1)^n$ δεν συγκλίνει.

ΘΕΜΑ Γ Αν a_n τείνει στον a, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ θα υπάρχει $N(\epsilon)$ τέτοιο ώστε για όλα τα $n > N$ να είναι $|a_n - a| < \epsilon$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι κάτι παρόμοιο ισχύει και για την β_n. Είνει εύκολο να δούμε ότι

$$|\beta_n - \beta| = \frac{|a_n - a|}{|\beta_n + \beta|}.$$

• Αν $a > 0$ ο παρονομαστής είναι μεγαλύτερος του $\beta = \sqrt{a}$, οπότε

$$|\beta_n - \beta| < \frac{\epsilon}{\beta}$$

Κάθε όμως θετικός αριθμός ϵ' μπορεί να παρασταθεί ως ϵ/β όπου ϵ κάποιος άλλος θετικός αριθμός. Επομένως γαι τον εκάστοτε θετικό ϵ' θα είναι $|\beta_n - \beta| < \epsilon'$ για όλα τα $n > N(\epsilon) = N(\epsilon'\beta)$.
• Αn $a = 0$, τότε $|a_| < \epsilon$ και επομένως $|\beta_n| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\epsilon} = \epsilon''$. Το οποίο ισχύει για όλα τα $n > N(\epsilon) = N(\epsilon''^2)$. Προφανώς και το όριο 0 επιτρέπεται, π.χ. $a_n = 1/n$.