Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 1ο Τεστ
11 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω $p, q \in \mathbb{Q}$ με $p < q$. Υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $p < r < q$.

(β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

(γ) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ τότε υπάρχει $s > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $f(x) \geqslant s$.

(δ) Έστω $f, g : (0,1) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in (0,1)$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (0,1)$.

2. **(2 μον.)** Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Αν πιστεύετε ότι είναι αληθής αποδείξτε την – αν πιστεύετε ότι είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

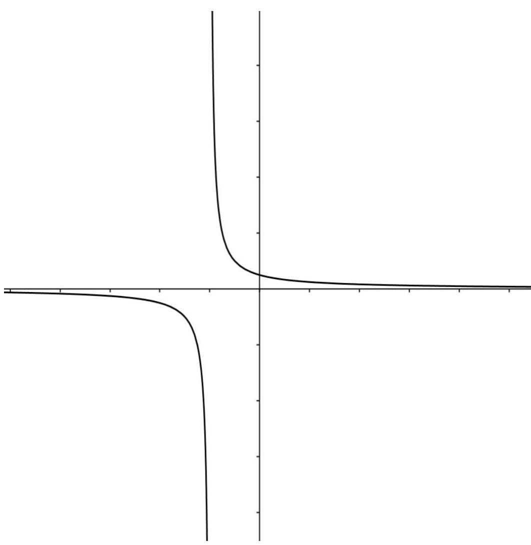
«Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η σύνθεση $g \circ f$ είναι $1-1$ τότε η f είναι $1-1$.»

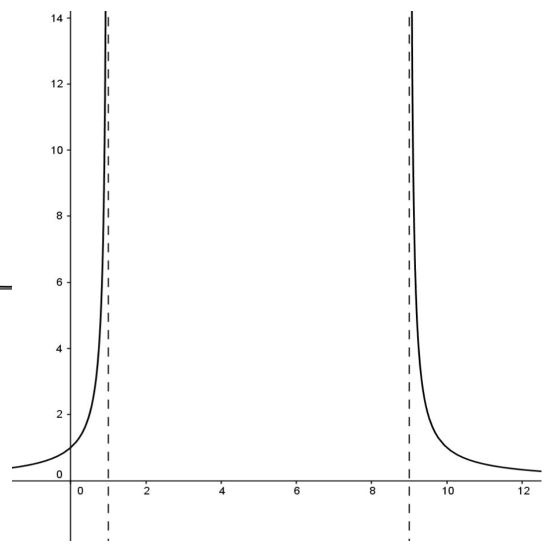
3. (2 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. (2 μον.) Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f : (-\infty, -1) \cup (-1, \infty) \to \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad g : \ (-\infty, 1) \cup (9, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Να γράψετε ποιές από αυτές είναι συνεχείς. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.





Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 1ο Τεστ
12 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $|x - y| \leqslant \varepsilon$. Τότε, $x = y$.

(β) Έστω p πολυώνυμο με την εξής ιδιότητα: η γραφική του παράσταση C_p είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x = 1$. Τότε, το p είναι άρτιου βαθμού.

(γ) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε $f(a) \leqslant a$ και $f(b) \geqslant b$. Τότε, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

(δ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει η $f''(0)$ τότε η f' είναι συνεχής στο 0.

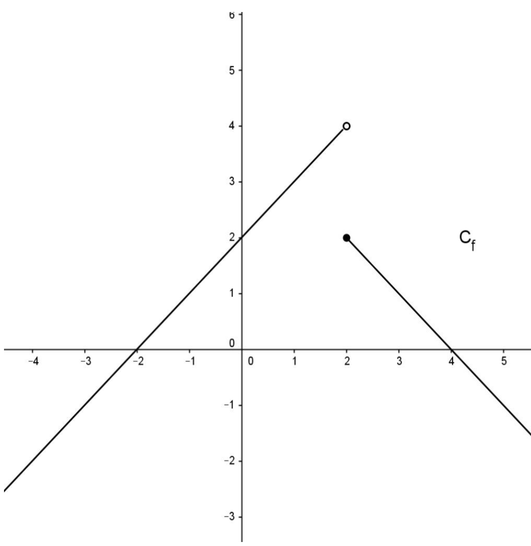
2. (**2 μον.**) Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Αν πιστεύετε ότι είναι αληθής αποδείξτε την – αν πιστεύετε ότι είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

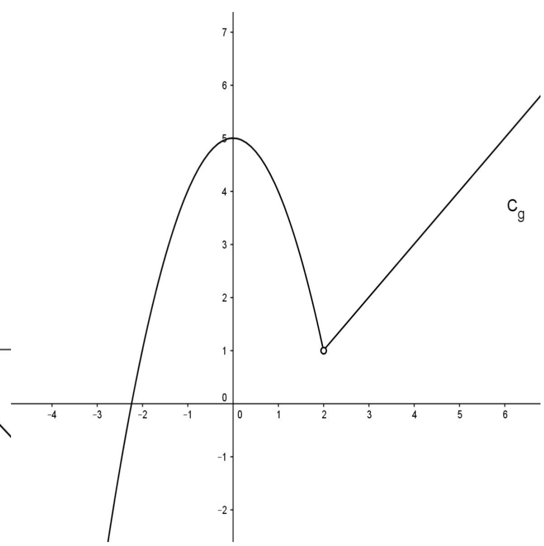
«Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που όλες οι τιμές της είναι ακέραιοι αριθμοί. Τότε, η f είναι σταθερή.»

3. (**2 μον.**) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 3x + 1$. Να βρείτε τα όρια

$$\lim_{x\to 2} f(f(x)), \qquad \lim_{x\to 2}\left(\lim_{y\to 1} f(x+y)\right), \qquad \lim_{x\to 2}\left(\lim_{y\to x} f(y)\right).$$

4. (**2 μον.**) Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια $\lim_{x\to 2} f(x)$ και $\lim_{x\to 2} g(x)$. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.





Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 1ο Τεστ
13 Οκτωβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Έστω $p, q \in \mathbb{Q}$ με $p < q$. Υπάρχει άρρητος $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $p < x < q$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι συνεχής τότε η f είναι συνεχής.

(γ) Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

(δ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2.$$

Τότε, η f είναι σταθερή.

2. (**2 μον.**) Εξετάστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής. Αν πιστεύετε ότι είναι αληθής αποδείξτε την – αν πιστεύετε ότι είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

«Έστω $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{1}{3}\big(f(1) + f(2) + f(3)\big)$.»

3. (**2 μον.**) Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

4. (**2 μον.**) Σχεδιάστε πρόχειρα μια πιθανή γραφική παράσταση συνεχούς συνάρτησης $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία να έχει **όλες** τις παρακάτω ιδιότητες:

- είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,
- έχει σύνολο τιμών το $(-1, 1)$,
- έχει σημείο καμπής το $(0, 0)$.