Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 4ο Τεστ
1 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (4 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η (a_n) είναι φραγμένη τότε και η (a_n^2) είναι φραγμένη.

(β) Αν $a_n \to 0$ τότε η $(|a_n|)$ είναι φθίνουσα.

(γ) Αν η (a_n) έχει θετικούς όρους και είναι γνησίως αύξουσα, τότε $a_n \to +\infty$.

(δ) Αν η (a_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό τότε είναι φραγμένη.

2. (3 μον.) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{n^4}{3^n}, \qquad \beta_n = \frac{n^2+4n}{5n^2-1}, \qquad \gamma_n = \sqrt[n]{1^3+2^3+\cdots+n^3}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. (**2 μον.**) Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) που ορίζεται από τις $x_1 = 2$ και

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2x_n + 3}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Ποιό είναι το όριό της;

4. (**2 μον.**) Αποδείξτε ότι η ακολουθία $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. *Υπόδειξη*: Εξετάστε πρώτα αν η (y_n) είναι μονότονη.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 4ο Τεστ
2 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (4 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to 0$, τότε $a_n^n \to 0$.

(β) Αν η $(|a_n|)$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό τότε και η (a_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(γ) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to 0$ τότε $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

(δ) Αν $a_n \in \mathbb{Q}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to x \in \mathbb{R}$, τότε $x \in \mathbb{Q}$.

2. (3 μον.) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{n!}{n^n}, \qquad \beta_n = \sqrt{n^4 + n} - n^2, \qquad \gamma_n = (\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{20} - 2) \cdot \cos(5^n + 1).$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. (**2 μον.**) Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) που ορίζεται από τις $x_1 = 1$ και

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + 2}{2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Ποιό είναι το όριό της;

4. (**2 μον.**) Έστω x θετικός πραγματικός αριθμός. Θεωρούμε την ακολουθία

$$b_n = \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2},$$

όπου: για κάθε $y \in \mathbb{R}$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του y (τον μοναδικό ακέραιο που ικανοποιεί την $\lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$). Αποδείξτε ότι $b_n \to x/2$.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 4ο Τεστ
3 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (4 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

(β) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(γ) Αν $a_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to x \in \mathbb{R}$, τότε $x \in \mathbb{Z}$.

(δ) Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to 1$, τότε $a_n^n \to 1$.

2. (3 μον.) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{\sin n}{n}, \qquad \beta_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n, \qquad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. (**2 μον.**) Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) που ορίζεται από τις $x_1 = 0$ και

$$x_{n+1} = \frac{3x_n^2 + 1}{2x_n + 2}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Ποιό είναι το όριό της;

4. (**2 μον.**) Έστω (γ_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\gamma_n \to \frac{2}{3}$. Αποδείξτε ότι $\lfloor \gamma_n \rfloor \to 0$ (με $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x).