Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 5ο Τεστ
8 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**2 μον.**) Αποδείξτε ότι: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία (q_n) ρητών αριθμών τέτοια ώστε $q_n \to x$.

2. (**3 μον.**) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}, \qquad \beta_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \qquad \gamma_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. **(2 μον.)** Έστω $\alpha > 1$ και έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x_1 > 0$ και $x_{n+1} \geqslant \alpha x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.

4. **(3 μον.)** Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί την $2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}$ για κάθε $n = 2, 3, \ldots$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $b_n = a_{n+1} - a_n$ συγκλίνει. Μπορείτε να βρείτε το όριό της;

Ανάλυση I και Εφαρμογές – 5ο Τεστ
9 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(2 μον.)** Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $a = \sup A$, αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A τέτοια ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2. **(3 μον.)** Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}, \qquad \beta_n = n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n+1}}\right), \qquad \gamma_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. (2 μον.) Έστω $0 < \alpha < 1$ και έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $|x_{n+1}| \leqslant \alpha |x_n|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.

4. (3 μον.) Έστω (a_n), (b_n) ακολουθίες πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: η (a_n) είναι αύξουσα, η (b_n) είναι φθίνουσα και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n \leqslant 2b_n + 3$. Αποδείξτε ότι οι (a_n) και (b_n) συγκλίνουν.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 5ο Τεστ
10 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**2 μον.**) Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν ο a είναι άνω φράγμα του A και υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, αποδείξτε ότι $a = \sup A$.

2. (**3 μον.**) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \qquad \beta_n = (\sqrt[n]{n} - 1)\sin(n^2), \qquad \gamma_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. **(2 μον.)** Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Ορίζουμε

$$x_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Αποδείξτε ότι η ακολουθία x_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη.

4. **(3 μον.)** Έστω (a_n), (b_n) δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(α) Αν, επιπλέον, η (b_n) είναι φραγμένη, δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

(β) Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αν δεν υποθέσουμε την (b_n) φραγμένη τότε δεν ισχύει απαραίτητα $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.