Ανάλυση I και Εφαρμογές – 6ο Τεστ

22 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (4 μον.) Έστω (α_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η ακολουθία $s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ είναι φραγμένη, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

(β) Αν $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ αποκλίνει.

(γ) Αν $k^2\alpha_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

(δ) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε οι σειρές $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k}$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k-1}$ συγκλίνουν.

2. (2 μον.) Έστω (α_k), (β_k) ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k \beta_k}$ συγκλίνει.

3. (3 μον.) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k^2)}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{k^k}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας (να εξηγήσετε ποιά κριτήρια χρησιμοποιείτε).

4. (2 μον.) Εξετάστε για ποιους $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}.$$

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 6ο Τεστ
23 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $\alpha_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

(β) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει απολύτως, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγκλίνει.

(γ) Αν $\alpha_k > 0$ και $\alpha_k \to \gamma < 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^k$ συγκλίνει.

(δ) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k}$ συγκλίνει.

2. **(2 μον.)** Έστω (α_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k}$ συγκλίνει απολύτως.

3. **(3 μον.)** Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}), \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{2^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\text{ημ}\frac{1}{k}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας (να εξηγήσετε ποιά κριτήρια χρησιμοποιείτε).

4. **(2 μον.)** Αποδείξτε ότι $1 \leqslant \sqrt[k]{k!} \leqslant k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα να βρείτε όλους τους $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους συγκλίνει η δυναμοσειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{\sqrt[k]{k!}}.$$

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 6ο Τεστ
24 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (4 μον.) Έστω (α_k), (β_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $\alpha_k \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ συγκλίνει.

(β) Αν $\alpha_k > 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha_k}}$ συγκλίνει.

(γ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ αποκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k + \beta_k)$ αποκλίνει.

(δ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγκλίνει.

2. (2 μον.) Έστω (α_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k^4}$$

συγκλίνουν.

3. (**3 μον.**) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - 1\right)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας (να εξηγήσετε ποιά κριτήρια χρησιμοποιείτε).

4. (**2 μον.**) Εξετάστε για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k(1-x)}{k}.$$