Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 7ο Τεστ
29 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (4 μον.) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)=1$, τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε: για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ ισχύει $f(x)>\frac{1}{2}$.

(β) Αν η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, και αν $f(0)=0$ και $f(1)=1$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,1]$.

(γ) Υπάρχει αύξουσα συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι ασυνεχής σε άπειρα το πλήθος σημεία.

(δ) Αν η $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε είναι φραγμένη.

2. (2 μον.) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_n\in[0,1]$ ώστε $f(x_n)\to 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0\in[0,1]$ ώστε $f(x_0)=0$.

3. **(3 μον.)** Ορίζουμε μια ακολουθία (x_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $x_k = \frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $x_k = \frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$.

4. **(2 μον.)** Έστω (α_k), (β_k), (γ_k) τρεις ακολουθίες πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε $\alpha_k \leqslant \beta_k \leqslant \gamma_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k$ συγκλίνουν, τότε και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνει.

Ανάλυση I και Εφαρμογές – 7ο Τεστ
30 Νοεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $f\left(\frac{1}{n}\right)=(-1)^n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε η f είναι ασυνεχής στο 0.

(β) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί την $|f(x)|\leqslant x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής στο 0.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε η $|g|$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ενώ η g να είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.

(δ) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο 1. Τότε, η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

2. (**2 μον.**) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής και επί συνάρτηση $f:[0,1]\to(0,1)$.

3. **(3 μον.)** Υποθέτουμε ότι $x_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} x_k$. Δείξτε ότι $\frac{x_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

4. **(2 μον.)** Έστω (α_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k}$ συγκλίνει.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 7ο Τεστ
1 Δεκεμβρίου 2016

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση, τότε η $g(x) = xf(x)$ είναι συνεχής στο 0.

(β) Αν οι $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο 0 και $f(0) < g(0)$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$.

(γ) Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|f(x)| = 1$, τότε η f είναι σταθερή.

(δ) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε ρητό $q \in \mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. (**2 μον.**) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\max(f) = \max(g)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

3. (3 μον.) Υποθέτουμε ότι $x_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Δείξτε ότι $\frac{x_n}{s_n^2} \leqslant \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ για κάθε $n \geqslant 2$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

4. (2 μον.) Έστω (α_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $k^2\alpha_k \to 0$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.