Ανάλυση Ι και Εφαρμογές

Ενδιάμεση Εξέταση – 10 Δεκεμβρίου 2016

1. (2 μον.) (α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δώστε σύντομη αιτιολόγηση για την απάντησή σας.

$$A=\left\{\frac{n^2}{n^2+1}:n\in\mathbb{N}\right\},\qquad B=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

(β) Έστω A,B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a\in A$ υπάρχει $b\in B$ τέτοιο ώστε $a\leqslant b$. Αποδείξτε ότι $\sup A\leqslant\sup B$.

2. (2 μον.) (α) Για καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει και, αν ναι, βρείτε το όριό της. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

$$a_n=n-\sqrt{n^2-n},\qquad b_n=\sqrt[n]{1+2^5+\cdots+n^5}.$$

(β) Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ με $b>a>0$. Ορίζουμε δύο ακολουθίες (a_n), (b_n) θέτοντας $a_1=a$, $b_1=b$ και

$$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\qquad b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι: $a_n<b_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, η (a_n) είναι αύξουσα, η (b_n) είναι φθίνουσα, και συμπεράνατε ότι οι (a_n) και (b_n) συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό.

3. (3 μον.) (α) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}\leqslant 3.$$

Υπόδειξη. Μπορείτε να αποδείξετε πρώτα με επαγωγή ότι $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}\leqslant 3-\frac{2}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ή να χρησιμοποιήσετε οποιονδήποτε άλλο τρόπο.

(β) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+\sqrt{k}}.$$

(γ) Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}$ συγκλίνει απολύτως.

4. (3 μον.) (α) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η $g(x)=xf(x)$ είναι συνεχής στο 0.

(β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: αν $p,q\in\mathbb{Q}$ και $p<q$ τότε $f(p)<f(q)$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα. Είναι η f γνησίως αύξουσα;

(γ) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x\in[a,b]$ υπάρχει $y\in[a,b]$ ώστε $|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0\in[a,b]$ ώστε $f(x_0)=0$.

5. (2 μον.) (α) Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε $a_n\to+\infty$.

(β) Εξετάστε αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση f με:

(i) πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και εικόνα (σύνολο τιμών) το $[0,\infty)$,

(ii) πεδίο ορισμού το $(0,1]$ και εικόνα το $[0,\infty)$,

(iii) πεδίο ορισμού το $(0,1]$ και εικόνα το $(-\infty,\infty)$.

Καλή Επιτυχία!

Ενδεικτικές απαντήσεις

1. (α) Για το σύνολο A παρατηρήστε ότι $\frac{1}{2} \leqslant \frac{n^2}{n^2+1} < 1$, δηλαδή ο $1/2$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του A ($\min A = \inf A = 1/2$) και ο 1 είναι άνω φράγμα του A. Αφού $\frac{n^2}{n^2+1} \in A$ για κάθε n και $\frac{n^2}{n^2+1} \to 1$, συμπεραίνουμε ότι $1 = \sup A$. Αφού $1 \notin A$, το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Για το σύνολο B παρατηρήστε αρχικά ότι ο $3/2$ είναι το μέγιστο στοιχείο του B. Επίσης, ο -1 είναι κάτω φράγμα του B και αφού $-1 + \frac{1}{2n-1} \in B$ και $-1 + \frac{1}{2n-1} \to -1$ συμπεραίνουμε ότι $-1 = \inf B$. Αφού $-1 \notin B$, το B δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

(β) Έστω $a \in A$. Από την υπόθεση υπάρχει $b \in B$ τέτοιος ώστε $a \leqslant b$. Όμως, $b \leqslant \sup B$. Άρα, $a \leqslant \sup B$.

Το $a \in A$ ήταν τυχόν, άρα ο $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A. Έπεται ότι $\sup A \leqslant \sup B$.

2. (α) Για την (a_n) παρατηρούμε ότι

$$a_n = n - \sqrt{n^2 - n} = \frac{n^2 - (n^2 - n)}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \to \frac{1}{2}.$$

Για την (b_n) παρατηρούμε ότι

$$1 \leqslant b_n = \sqrt[n]{1 + 2^5 + \cdots + n^5} \leqslant \sqrt[n]{n \cdot n^5} = (\sqrt[n]{n})^6$$

και αφού $\sqrt[n]{n} \to 1$ έπεται ότι $b_n \to 1$.

(β) Δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

1. $a_n > 0$ και $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. $a_n \leqslant b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από τον αναδρομικό ορισμό (ανεξάρτητα μάλιστα από το ποιοί είναι οι a_n και b_n) έχουμε

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \leqslant \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}.$$

3. Η (a_n) είναι αύξουσα. Παρατηρήστε ότι $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{a_n^2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Η (b_n) είναι φθίνουσα. Παρατηρήστε ότι $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant \frac{2b_n}{2} = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τα παραπάνω, η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον b_1, ενώ η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον a_1 (εξηγήστε γιατί). Άρα, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \to a$ και $b_n \to b$. Από την $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ έπεται ότι $b = \frac{a+b}{2}$, δηλαδή $a = b$.

3. (α) Δείχνουμε με επαγωγή ότι $s_n := 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για το επαγωγικό βήμα γράφουμε

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leqslant 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}},$$

και αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$-\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leqslant -\frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

Ισοδύναμα, ότι

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

Όμως,

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}}=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}&=\frac{2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\\ &\geqslant\frac{2}{2\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}}=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}.\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν $s_n\leqslant 3$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, απ' όπου έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}s_n\leqslant 3.$$

(β) Για την $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}}$ παρατηρήστε ότι έχει ισοδύναμη συμπεριφορά με την $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, άρα αποκλίνει. Για την $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$ εφαρμόστε το κριτήριο λόγου: $\frac{a_{k+1}}{a_k}\to\frac{1}{e}<1$, άρα η σειρά συγκλίνει. Η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+\sqrt{k}}$ συγκλίνει από το κριτήριο Leibniz.

(γ) Για κάθε $k\in\mathbb{N}$ ισχύει $\left|\frac{a_k}{k}\right|\leqslant\frac{1}{2}a_k^2+\frac{1}{2}\frac{1}{k^2}$. Άρα, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{a_k}{k}\right|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνουν, άρα έχουν φραγμένα μερικά αθροίσματα. Δηλαδή, υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant M$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε, τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{a_k}{k}\right|$ είναι κι αυτά φραγμένα από τον M, άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{a_k}{k}\right|$ συγκλίνει.

4. (α) Έστω (x_n) ακολουθία με $x_n\to 0$. Αφού η f είναι φραγμένη συνάρτηση, η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι φραγμένη, άρα $g(x_n)=x_nf(x_n)\to 0=g(0)$. Από την αρχή της μεταφοράς έπεται ότι η g είναι συνεχής στο 0.

(β) Έστω $x,y\in\mathbb{R}$ με $x<y$. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία ρητών $p_n\to x$ και φθίνουσα ακολουθία ρητών $q_n\to y$. Για κάθε n έχουμε $p_n\leqslant x<y\leqslant q_n$, άρα $f(p_n)<f(q_n)$. Από την αρχή της μεταφοράς, $f(p_n)\to f(x)$ και $f(q_n)\to f(y)$. Έπεται ότι $f(x)\leqslant f(y)$.

Επιπλέον, η ανισότητα είναι γνήσια: θεωρήστε ρητούς t,s τέτοιους ώστε $x<t<s<y$. Τότε, $f(t)<f(s)$ και το προηγούμενο επιχείρημα δείχνει ότι $f(x)\leqslant f(t)$ και $f(s)\leqslant f(y)$. Άρα, $f(x)<f(y)$.

(γ) Υποθέτουμε ότι η f δεν μηδενίζεται στο $[a,b]$. Τότε, $|f(t)|>0$ για κάθε $t\in[a,b]$. Η συνεχής συνάρτηση $|f|$ παίρνει ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$. Δηλαδή, υπάρχει $x\in[a,b]$ ώστε

$$|f(t)|\geqslant|f(x)|>0\quad\text{για κάθε } t\in[a,b].$$

Όμως, από την υπόθεση, υπάρχει $y\in[a,b]$ ώστε

$$0<|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}|f(y)|,$$

το οποίο είναι άτοπο.

5. (α) Έστω $M>0$. Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $a_{n_0}>M$. Αφού η (a_n) είναι αύξουσα, για κάθε $n\geqslant n_0$ έχουμε $a_n\geqslant a_{n_0}>M$. Με βάση τον ορισμό, $a_n\to+\infty$.

(β) Δεν υπάρχει συνεχής $f : [0,1] \to [0,\infty)$ επί. Η εικόνα της f είναι κλειστό διάστημα, άρα δεν μπορεί να είναι το $[0,\infty)$. Η $f : (0,1] \to [0,\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ είναι συνεχής και επί.

Τέλος, η $f : (0,\infty] \to (-\infty,\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ είναι συνεχής και επί. Παρατηρήστε ότι

$$f\left(\frac{1}{2\pi n + \pi/2}\right) = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \to +\infty$$

και

$$f\left(\frac{1}{2\pi n - \pi/2}\right) = -\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) \to -\infty,$$

και εφαρμόστε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για να δείξετε ότι κάθε $\rho \in (-\infty,\infty)$ είναι τιμή της f.