

Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 3: Σειρές πραγματικών αριθμών

Α' Ομάδα

1. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν $a_k \rightarrow 0$ τότε η ακολουθία $s_n = a_1 + \dots + a_n$ είναι φραγμένη.

(β) Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \dots + a_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(γ) Αν $|a_k| \rightarrow 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(δ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(ε) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(στ) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

(ζ) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

(η) Αν $a_k \rightarrow 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ συγκλίνει.

(θ) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ συγκλίνει.

(ι) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(ια) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

2. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{k!}$ συγκλίνει.

3. Εξετάστε για ποιές τιμές του p συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$.

4. Δειξτε ότι

$$(α) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \quad (β) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k} = \frac{3}{2} \quad (γ) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1.$$

5. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

6. Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου και ρίζας στις ακόλουθες σειρές:

$$\begin{aligned}
 & \text{(α)} \sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k & \text{(β)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & \text{(γ)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} & \text{(δ)} \sum_{k=0}^{\infty} k^3 x^k \\
 & \text{(ε)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k & \text{(στ)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2} & \text{(ζ)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k & \text{(η)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10} x^k}{k!}.
 \end{aligned}$$

Αν για κάποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ κανένα από αυτά τα δύο κριτήρια δεν δίνει απάντηση, εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς με άλλο τρόπο.

7. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\begin{aligned}
 & \text{(α)} a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} & \text{(β)} a_k = \sqrt{1+k^2} - k \\
 & \text{(γ)} a_k = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k} & \text{(δ)} a_k = (\sqrt[k]{k} - 1)^k.
 \end{aligned}$$

8. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + \sqrt{k}}{2k^3 - 1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

9. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές. Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι $p, q, x \in \mathbb{R}$ να βρεθούν οι τιμές τους για τις οποίες οι αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν.

$$\begin{aligned}
 & \text{(α)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2} & \text{(β)} \sum_{k=1}^{\infty} p^k k^p \quad (0 < p) & \text{(γ)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q} \quad (0 < q < p) \\
 & \text{(δ)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}} & \text{(ε)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k} \quad (0 < q < p) & \text{(στ)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k} \\
 & \text{(ζ)} \sum_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).
 \end{aligned}$$

Β' Ομάδα

10. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

$$\begin{aligned}
 & \text{(α)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{10^k}, & \text{(β)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}, & \text{(γ)} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} \\
 & \text{(δ)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - \sqrt{k}}{k^2 + 1}, & \text{(ε)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}, & \text{(στ)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}, \quad x \in \mathbb{R} \\
 & \text{(ζ)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + k}, & \text{(η)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}, & \text{(θ)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}.
 \end{aligned}$$

11. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

12. Έστω $\{a_k\}$ φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο 0. Ορίζουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k.$$

Δείξτε ότι $0 \leq (-1)^n (s - s_n) \leq a_{n+1}$.

13. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $ka_k \rightarrow 0$.

14. Έστω ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι οι

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$$

συγκλίνουν επίσης.

15. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι, αν η $\{a_k\}$ είναι φθίνουσα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

16. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

17. Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει απολύτως.

18. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει και αν $p > 1/2$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^p}$ συγκλίνει απολύτως.

19. Προσδιορίστε τις τιμές των a, b, c για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^k}{k^b (\ln k)^c}.$$

20. Προσδιορίστε τις τιμές των $a, b, c > 0$ για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a \sin\left(\frac{1}{k^b}\right) \cos\left(\frac{1}{k^c}\right).$$

21. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k > 1$. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$$

συγκλίνει.

22. Έστω (a_n) ακολουθία στο \mathbb{R} . Υποθέτουμε ότι $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει.

23. Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και αν η (b_k) είναι μονότονη και φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

24. Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ συγκλίνει, δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

25. Έστω $(a_k)_{k \geq 0}$ φραγμένη ακολουθία. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ισούται με 1.

26. Έστω $(a_k)_{k \geq 0}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ισούται με 1.

Γ' Ομάδα

27. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1.$$

28. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $a_k \rightarrow 0$. Δείξτε ότι: αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min \left\{ a_k, \frac{1}{k} \right\} = +\infty.$$

29. Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

(α) Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι: για $1 \leq m < n$,

$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} \geq 1 - \frac{s_m}{s_n}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ αποκλίνει.

(γ) Δείξτε ότι $\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

30. Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$.

(α) Δείξτε ότι: για $1 \leq m < n$,

$$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} \geq 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

31. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε και η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$$

αποκλίνει.

32. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε και η

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{k}{k+1}}$$

συγκλίνει.