Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 5: Παράγωγος

Α΄ Ομάδα

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε η f είναι συνεχής στο (a, b).

(β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και αν $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} nf(1/n) = 0$.

(γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = a$, τότε $f'(a) = 0$.

1. Αν $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$ και $f(0) = 0$, τότε $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$.

(δ) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ και $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ ώστε $f''(x_0) = 0$.

(ε) Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in (a, b)$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ και αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x_0) = \ell$.

(στ) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$.

(ζ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f'(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

2. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες στο 0.

(α) $f(x) = x$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ και $f(x) = 0$ αν $x \in \mathbb{Q}$.

(β) $g(x) = 0$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ και $g(x) = x^2$ αν $x \in \mathbb{Q}$.

(γ) $h(x) = \sin x$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ και $h(x) = x$ αν $x \in \mathbb{Q}$.

3. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν είναι, εξετάστε αν η παράγωγός τους είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(α) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $f(0) = 0$.

(β) $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $g(0) = 0$.

(γ) $h(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $h(0) = 0$.

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν η $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

5. Βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία στα οποία είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & , \quad x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}\,(p, q) = 1 \end{cases}$$

6. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ η οποία:

(α) είναι συνεχής στο $(0, 1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$.

(β) είναι συνεχής στο $(0,1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 2$.

7. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:
(α) $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) > 0$.
(β) $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) < 0$.
(γ) $f(0) = 0$, $f(3) = 1$, $f'(1) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.
(δ) $f(m) = 0$ και $f'(m) = (-1)^m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι: $f(x_0) = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g είναι συνεχής στο x_0. Δείξτε ότι η συνάρτηση γινόμενο $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στοx_0.

9. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο διάστημα που υποδεικνύεται.
(α) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ στο $[-2,2]$.
(β) $f(x) = x^5 + x + 1$ στο $[-1,1]$.
(γ) $f(x) = x^3 - 3x$ στο $[-1,2]$.

10. Δείξτε ότι η εξίσωση:
(α) $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.
(β) $6x^4 - 7x + 1 = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.
(γ) $x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

11. Έστω $a_1 < \cdots < a_n$ στο $\mathbb{R}$ και έστω $f(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς $n - 1$ λύσεις.

12. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \qquad f(x) = x + \frac{3}{x^2}, \qquad f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \qquad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

θεωρώντας σαν πεδίο ορισμού τους το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο μπορούν να οριστούν.

13. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$.

14. Έστω $a > 0$. Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - a|}$$

είναι ίση με $\frac{2+a}{1+a}$.

15. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[a,b]$ και ότι $f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x στο (a,b) για το οποίο οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα $(x, f(x))$ και $(x, g(x))$ είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

16. Δίνονται δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Δείξτε ότι ανάμεσα σε δύο ρίζες της $f(x) = 0$ βρίσκεται μια ρίζα της $g(x) = 0$, και αντίστροφα.

Β΄ Ομάδα

17. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b), με $f(a)=f(b)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1\neq x_2\in(a,b)$ ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)=0$.

18. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0.$$

19. Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{x}$ για κάθε $x>1$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+\sqrt{x})-f(x)]=0$.

20. Έστω f,g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[0,a]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,a)$. Υποθέτουμε ότι $f(0)=g(0)=0$ και $f'(x)>0$, $g'(x)>0$ στο $(0,a)$.

(α) Αν η f' είναι αύξουσα στο $(0,a)$, δείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0,a)$.

(β) Αν η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα στο $(0,a)$, δείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0,a)$.

21. (α) Δείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^x\geqslant 1+x$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

$$1-\frac{1}{x}\leqslant\log x\leqslant x-1.$$

22. Δείξτε ότι για κάθε $x>0$ και για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$\ln x\leqslant n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\leqslant\sqrt[n]{x}\,\ln x.$$

Συμπεράνατε ότι $\lim_{n\to\infty} n\,(\sqrt[n]{x}-1)=\ln x$ για $x>0$.

23. (α) Δείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=x.$$

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x.$$

24. Μελετήστε τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

στο $(0,+\infty)$ και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση. Ποιός είναι μεγαλύτερος, ο e^π ή ο π^e;

25. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\ln$ και $\exp$ ικανοποιούν τα εξής: (α) για κάθε $s>0$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^s}=+\infty$$

και (β)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^s}=0.$$

Δηλαδή, η $\exp$ αυξάνει στο $+\infty$ ταχύτερα από οποιαδήποτε (μεγάλη) δύναμη του x, ενώ η $\ln$ αυξάνει στο $+\infty$ βραδύτερα από οποιαδήποτε (μικρή) δύναμη του x.

26. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f'(x)=cf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου c μια σταθερά. Δείξτε ότι υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x)=ae^{cx}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

27. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b), ώστε $f(a)=f(b)=0$. Δείξτε ότι: για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, η συνάρτηση $g_\lambda:[a,b]\to\mathbb{R}$ με

$$g_\lambda(x):=f'(x)+\lambda f(x)$$

έχει μια ρίζα στο διάστημα (a,b).

28. Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$ και έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $\lim_{x\to b^-}f(x)=+\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f'(\xi)>f(\xi)$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $e^{-x}f(x)$.]

29. Δείξτε ότι για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$\sin x\geqslant\frac{2x}{\pi}.$$

30. (α) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $g=f^2+(f')^2$.]
(β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0)=1$, $f'(0)=0$ και $f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x)=\cos x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

31. (α) Δείξτε ότι η εξίσωση $\tan x=x$ έχει ακριβώς μία λύση σε κάθε διάστημα της μορφής $I_k=\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$.
(β) Έστω a_k η λύση της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα I_k, $k\in\mathbb{N}$. Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{k\to\infty}(a_{k+1}-a_k)$ και δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

Γ΄ Ομάδα

32. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a_1<a_2<\cdots<a_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}|x-a_k|$.

33. Έστω $n\in\mathbb{N}$ και έστω $f(x)=(x^2-1)^n$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f^{(n)}(x)=0$ έχει ακριβώς n διαφορετικές λύσεις, όλες στο διάστημα $(-1,1)$.

34. Να βρεθούν όλοι οι $a>1$ για τους οποίους η ανισότητα $x^a\leqslant a^x$ ισχύει για κάθε $x>1$.

35. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0)=0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $0\leqslant f'(x)\leqslant 2f(x)$ για κάθε $x\in(0,1)$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή και ίση με 0 στο $[0,1]$.

36. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$. Δείξτε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

37. Έστω $\alpha>0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\alpha e^x=1+x+x^2/2$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

38. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη. Δείξτε ότι: για κάθε $\alpha>1$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}=0.$$

39. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim_{x \to b^-} f'(x)$ τότε είναι ίσο με $+\infty$.

40. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ τότε είναι ίσο με 0.