Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 6: Θεώρημα Taylor

Α΄ Ομάδα

1. Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ πολυώνυμο βαθμού n και έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχουν $b_0, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$p(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι

$$b_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

2. Γράψτε καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα στη μορφή $b_0 + b_1(x-3) + \cdots + b_n(x-3)^n$:

$$p_1(x) = x^2 - 4x - 9, \quad p_2(x) = x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1, \qquad p_3(x) = x^5.$$

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,a}$ που υποδεικνύεται.

$$\begin{aligned}
(T_{3,f,0}) &\ :\ f(x) = \exp(\sin x).\\
(T_{2n+1,f,0}) &\ :\ f(x) = (1+x^2)^{-1}.\\
(T_{n,f,0}) &\ :\ f(x) = (1+x)^{-1}.\\
(T_{4,f,0}) &\ :\ f(x) = x^5 + x^3 + x.\\
(T_{6,f,0}) &\ :\ f(x) = x^5 + x^3 + x.\\
(T_{5,f,1}) &\ :\ f(x) = x^5 + x^3 + x.
\end{aligned}$$

4. Έστω $n \geqslant 1$ και $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις n φορές παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

5. Έστω $n \geqslant 2$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση n φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι:

(α) Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

(β) Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

(γ) Αν ο n είναι περιττός, τότε η f δεν έχει τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο x_0, αλλά το x_0 είναι σημείο καμπής για την f.

6. Αν $f(x) = \ln x$, $x > 0$, βρείτε την πλησιέστερη ευθεία και την πλησιέστερη παραβολή στο γράφημα της f στο σημείο $(e, 1)$.

7. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $f(0) = 0$ και

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \qquad x \neq 0.$$

8. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f'''=f$ και $f(0)=1$, $f'(0)=f''(0)=0$.

(α) Έστω $R>0$. Δείξτε ότι υπάρχει $M=M(R)>0$ ώστε: για κάθε $x\in[-R,R]$ και για κάθε $k=0,1,2,\ldots$,

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant M.$$

(β) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{3n,f,0}$ και, χρησιμοποιώντας το (α) και οποιονδήποτε τύπο υπολοίπου, δείξτε ότι

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{3k}}{(3k)!}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

9. Βρείτε προσεγγιστική τιμή, με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6}, για καθέναν από τους αριθμούς

$$\sin 1,\quad \sin 2,\quad \sin\frac{1}{2},\quad e,\quad e^2.$$

10. (α) Δείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$$

και

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}.$$

(β) Δείξτε ότι $\pi=3.14159\cdots$ (με άλλα λόγια, βρείτε προσεγγιστική τιμή για τον αριθμό π με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6}).

Β΄ Ομάδα

11. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=f(1)=0$. Υποθέτουμε ότι $|f''(x)|\leq M$ για κάθε $x\in(0,1)$. Δείξτε ότι $|f'(x)|\leq M/2$ για κάθε $x\in[0,1]$.

12. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $M_k=\sup\{|f^{(k)}(x)|:x\in\mathbb{R}\}$, $k=0,1,2$, δείξτε ότι

$$M_1\leq 2\sqrt{M_0M_1}.$$

13. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία υπάρχει η $f''(0)$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο πολυώνυμο Taylor της f, δείξτε ότι

$$f''(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)+f(-t)-2f(0)}{t^2}.$$