

Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 7: Ολοκλήρωμα Riemann

Α' Ομάδα

1. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

- (α) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι φραγμένη.
- (β) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε παίρνει μέγιστη τιμή.
- (γ) Αν η f είναι φραγμένη, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη.
- (δ) Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.
- (ε) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $c \in [a, b]$ ώστε $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$.
- (στ) Αν η f είναι φραγμένη και αν $L(f, P) = U(f, P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$, τότε η f είναι σταθερή.
- (ζ) Αν η f είναι φραγμένη και αν υπάρχει διαμέριση P ώστε $L(f, P) = U(f, P)$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.
- (η) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

2. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leq 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b, 1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

3. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 2$ είναι ολοκληρώσιμη.

4. Έστω $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

5. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:

- (α) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$.
- (β) $f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$.

6. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 2]$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα τους (αν υπάρχει):

- (α) $f(x) = x + [x]$.
- (β) $f(x) = 1$ αν $x = \frac{1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ αλλιώς.

7. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

8. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

9. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

10. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $g(a) = g(b) = 0$, ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

11. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx \right).$$

12. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το $[0, 1]$ με τυχόν διάστημα $[a, b]$;

13. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

συγκλίνει στο $\int_0^1 f(x)dx$. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του Riemann.]

14. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

15. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt.$$

Μπορούμε πάντα να επιλέγουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a, b) ;

16. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και θετική συνάρτηση ώστε $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ ώστε $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \frac{1}{n}$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$.

17. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s \in [0, 1]$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)x^2 dx = \frac{f(s)}{3}.$$

18. Υποθέτουμε ότι η $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$$

για κάθε $x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

19. Έστω $f, h : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι η h είναι συνεχής και η f είναι παραγωγίσιμη. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_0^{f(x)} h(t)dt.$$

Δείξτε ότι $F'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x)$.

20. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\delta > 0$. Ορίζουμε

$$g(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt.$$

Δείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την g' .

21. Έστω $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 dt.$$

Δείξτε ότι η G είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και βρείτε την G' .

22. Έστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right) dt.$$

Βρείτε την F' .

Β' Ομάδα

23. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας $a_n = \int_0^1 f(x^n)dx$. Δείξτε ότι $a_n \rightarrow f(0)$.

24. Δείξτε ότι η ακολουθία $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x} dx$ συγκλίνει.

25. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

για κάθε $x, y \in [0, 1]$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

26. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x)| \leq M \int_a^x |f(t)| dt$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

27. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει θετική συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_0^1 f(x) dx = 1, \quad \int_0^1 x f(x) dx = a \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^2 f(x) dx = a^2.$$

28. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, μη αρνητική συνάρτηση. Θέτουμε $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx \right)^{1/n}$$

συγκλίνει, και $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = M$.

29. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε ότι η f έχει πολλά σημεία συνέχειας.

(α) Υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ ώστε $U(f, P) - L(f, P) < b - a$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε ότι υπάρχουν $a_1 < b_1$ στο $[a, b]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} < 1.$$

(β) Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n, b_n] \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$ ώστε

$$\sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε αυτό.

(δ) Τώρα δείξτε ότι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a, b]$ (δεν χρειάζεται περισσότερη δουλειά!).

30. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

31. Έστω $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in [0, a]$,

$$\int_0^x f(u)(x-u) du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du.$$

32. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a, b]$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \int_a^b |f'(x)| dx.$$

33. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $x > 0$,

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x).$$

34. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$|f(x)| \leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

35. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία ικανοποιεί την

$$f(x)^2 = 2 \int_0^x f(t) dt$$

για κάθε $x \geq 0$. Δείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

36. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

37. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες

$$a_n = \int_0^\pi \sin(nx) dx \quad \text{και} \quad b_n = \int_0^\pi |\sin(nx)| dx.$$

38. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν συνεχείς, αύξουσες και θετικές συναρτήσεις $g, h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f = g - h$.

Γ' Ομάδα

39. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχή παράγωγο και ότι $0 < f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 [f(x)]^3 dx \leq \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

40. Έστω $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^a |f(t)f'(t)| dt \leq \frac{a}{2} \int_0^a |f'(t)|^2 dt.$$

41. Έστω $f_0 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $k = 1, 2, \dots$ ορίζουμε $f_k : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t) dt.$$

Δείξτε ότι

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{k-1} dt.$$

42. Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty f(x) dx$ είναι πεπερασμένο. Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

43. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(a) = f(b) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f' είναι συνεχής και ότι $\int_a^b [f(x)]^2 dx = 1$. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες δείξτε ότι

$$\int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2},$$

και, χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\left(\int_a^b x^2 [f(x)]^2 dx \right) \left(\int_a^b [f'(x)]^2 dx \right) \geq \frac{1}{4}.$$

44. Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) dy \right] dx \\ &= (b-a) \int_a^b f(x)g(x) dx - \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right). \end{aligned}$$

Αν οι f και g είναι αύξουσες, χρησιμοποιώντας το παραπάνω δείξτε ότι

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b g(x) dx \right) \leq (b-a) \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

45. Έστω $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(x) dx - \int_k^{k+1} (k+1-x)f'(x) dx.$$

46. (α) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^{n-1} f(x) dx = 0.$$

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^{n-1} f(x) dx = f(1).$$

47. (α) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/\sqrt{n}} n f(x) e^{-nx} dx = f(0).$$

(β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n f(x) e^{-nx} dx = f(0).$$