Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 3ο Τεστ (Σειρά Α)
27-28 Νοεμβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Έστω (a_k), (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(β) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει.

(γ) Αν $k^2 a_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(δ) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

2. **(3 μον.)** Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\cos k)^2}{k^2}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας (να εξηγήσετε ποιά κριτήρια χρησιμοποιείτε).

3. (2 μον.) Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει απολύτως. [*Υπόδειξη:* $|xy| \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.]

4. (2 μον.) Έστω $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: $f(x)=x^2$ για κάθε ρητό $x\in(0,1)$. Να βρεθεί το $f\big(\frac{\sqrt{2}}{2}\big)$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 3ο Τεστ (Σειρά Β)
27-28 Νοεμβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (4 μον.) Έστω (a_k), (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(β) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ συγκλίνει.

(γ) Αν $k^2 a_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(δ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ και $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ συγκλίνουν.

2. (3 μον.) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{10^k} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k}} - 1 \right).$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας (να εξηγήσετε ποιά κριτήρια χρησιμοποιείτε).

3. **(2 μον.)** Έστω $a_k > 0$ και $b_k > 0$. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει και ότι $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_{k+1}}{b_k}$ για κάθε $k \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\frac{a_k}{b_k}$ είναι φραγμένη, και χρησιμοποιώντας το αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

4. **(2 μον.)** Έστω $f : [a, b] \to [a, b]$ συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x \in [a, b]$ με $f(x) = x$.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 3ο Τεστ (Σειρά Γ)
27-28 Νοεμβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Έστω (a_k), (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η ακολουθία $s_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$ είναι φραγμένη.

(β) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ συγκλίνει.

(γ) Αν $k^2 a_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(δ) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln(k+1)}$ συγκλίνει.

2. **(3 μον.)** Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k^2+1}{k^3+1}\right)^2 \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας (να εξηγήσετε ποιά κριτήρια χρησιμοποιείτε).

3. (2 μον.) Έστω ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$ συγκλίνει επίσης.

4. (2 μον.) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, και $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε

$$f(y) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 3ο Τεστ (Σειρά Δ)
27-28 Νοεμβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Έστω (a_k), (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $a_k \to 0$ τότε η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη.

(β) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(γ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ αποκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ αποκλίνει.

(δ) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

2. (**3 μον.**) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \text{ημ}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας (να εξηγήσετε ποιά κριτήρια χρησιμοποιείτε).

3. **(2 μον.)** Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ συγκλίνει απολύτως. [*Υπόδειξη:* $|xy| \leqslant \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.]

4. **(2 μον.)** Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 3ο Τεστ (Σειρά Ε)
27-28 Νοεμβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Έστω (a_k), (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $a_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(β) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(γ) Αν $a_k > 0$ και $a_k \to \gamma < 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^k$ συγκλίνει.

(δ) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει.

2. (**3 μον.**) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\text{ημ}\left(\frac{1}{k}\right).$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας (να εξηγήσετε ποιά κριτήρια χρησιμοποιείτε).

3. (2 μον.) Έστω ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει επίσης.

4. (2 μον.) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει $|f(x)| = 1$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.