Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 4ο Τεστ (Σειρά Α)
17-19 Δεκεμβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Υπάρχει φραγμένη και συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ η οποία δεν παίρνει μέγιστη τιμή.

(β) Έστω $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \geqslant 0$. Τότε, η g διατηρεί πρόσημο: είτε $g(x) > 0$ για κάθε $x \geqslant 0$ ή $g(x) < 0$ για κάθε $x \geqslant 0$.

(γ) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(0) = -f(1)$ τότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

(δ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = a$, τότε $f'(a) = 0$.

2. **(3 μον.)** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: αν $p, q \in \mathbb{Q}$ και $p < q$ τότε $f(p) < f(q)$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα.

3. (2 μον.) Χρησιμοποιώντας τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας, δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x+1}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

4. (2 μον.) Έστω $\alpha > 0$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\alpha e^x = 1 + x + x^2/2$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 4ο Τεστ (Σειρά Β)
17-19 Δεκεμβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μη σταθερό πολυώνυμο το οποίο δεν μηδενίζεται πουθενά, τότε το p είναι άρτιου βαθμού.

(β) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση, τότε η $g(x) = xf(x)$ είναι συνεχής στο 0.

(γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και αν $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} nf(1/n) = 0$.

(δ) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

2. **(3 μον.)** Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \geqslant 0$, δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. **(2 μον.)** Χρησιμοποιώντας τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας, δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

4. **(2 μον.)** Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0.$$

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 4ο Τεστ (Σειρά Γ)
17-19 Δεκεμβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (4 μον.) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν οι $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο 0 και $f(0) < g(0)$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$.

(β) Αν $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$ και $f(0) = 0$, τότε $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$.

(γ) Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|f(x)| = 1$, τότε η f είναι σταθερή.

(δ) Υπάρχει συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, 1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$.

2. (3 μον.) Υποθέτουμε ότι η $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Αποδείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in [a, +\infty)$ με $f(x) \geqslant f(x_0)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.

3. (**2 μον.**) Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\max(f) = \max(g)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

4. (**2 μον.**) Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 1$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0.$$

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 4ο Τεστ (Σειρά Δ)
17-19 Δεκεμβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (**4 μον.**) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε ρητό $q \in \mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε η f είναι συνεχής στο (a, b).

(γ) Αν η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, και αν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 1]$.

(δ) Υπάρχει συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, 1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$.

2. (**3 μον.**) Χρησιμοποιώντας τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας, δείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{1 + x}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

3. (**2 μον.**) Έστω $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f(\sqrt[n]{x}) = f(x)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

4. (**2 μον.**) Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$. Αποδείξτε ότι δεν μπορεί να υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\lim_{x \to b^-} f'(x) = \alpha$.

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 4ο Τεστ (Σειρά Ε)
17-19 Δεκεμβρίου 2018

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (4 μον.) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $|f(x) - f(y)| \leqslant 4|x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής.

(β) Υπάρχει αύξουσα συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ασυνεχής σε άπειρα το πλήθος σημεία.

(γ) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$.

(δ) Υπάρχει συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $(0,1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 2$.

2. (3 μον.) Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $f(x^2) = f(x)$. Αποδείξε ότι η f είναι σταθερή.

3. (**2 μον.**) Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $g(a) = g(b) = 0$. Υποθέτουμε ότι η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) και $g''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι $g(t) \neq 0$ για κάθε $t \in (a, b)$.

4. (**2 μον.**) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b), με $f(a) = f(b)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in (a, b)$ ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.